ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Χρήστος Μπαντής
Ελληνικό Ινστιτούτο Μετρολογίας
Βιομηχανική Περιοχή Θεσσαλονίκης, Οικ. Τετρ. 45
57022 Σίνδος, Θεσσαλονίκη
e-mail: bandis@eim.org.gr

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται η σύγκριση αναλυτικών (όπως αυτές περιγράφονται στο “Guide to the expression of uncertainty in measurement”-*GUM*) και αριθμητικών (Monte Carlo) μεθόδων υπολογισμού της αβεβαιότητας μέτρησης. Από την σύγκριση προκύπτει ότι όλες οι προϋποθέσεις εφαρμογής (γραμμικότητα μοντέλου, central limit theorem κτλ.) του αναλυτικού υπολογισμού θα πρέπει να πληρούνται ώστε τα αποτελέσματα να μην είναι τα λανθασμένα. Η χρήση της μεθόδου Monte Carlo από την άλλη μεριά λόγω της σημερινής υπολογιστικής δύναμης των προσωπικών υπολογιστών μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα περισσότερα μοντέλα μέτρησης και να αποτελέσει μία γρήγορη μέθοδο για την επιβεβαίωση (validation) ή ακόμη και την αντικατάσταση των αναλυτικών μεθόδων υπολογισμού. Τέλος θα παρουσιάσουμε παραδείγματα όπου οι δύο μέθοδοι καταλήγουν σε διαφορετικά αποτελέσματα, έτσι ώστε να καταστεί προφανές ότι οι μέθοδοι που περιγράφονται στο *GUM* πρέπει να εφαρμόζονται μόνο όταν όλες οι προϋποθέσεις εφαρμογής τους πληρούνται.

Λέξεις-Κλειδιά: Αβεβαιότητα μέτρησης, Monte Carlo, διάδοση αβεβαιοτήτων.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η χρήση και ανάπτυξη της σύγχρονης τεχνολογίας απαιτεί την συνεχή πραγματοποίηση μετρήσεων που αφορούν μια ευρεία γκάμα μεγεθών και ποσοτήτων. Η πραγματοποίηση των μετρήσεων άλλοτε απαιτεί απλές διατάξεις και μετρητικές διαδικασίες και άλλοτε πολύπλοκα πειράματα εξαιρετικής ακρίβειας και δυσκολίας τα οποία, εκτός των άλλων, μπορεί και να ελέγχουν την ορθότητα των γενικά σήμερα παραδεκτών επιστημονικών θεωριών.

Κάθε αποτέλεσμα μίας μέτρησης αποτελεί μία *εκτίμηση* της μετρούμενης φυσικής ποσότητας, της οποίας η *πραγματική* τιμή ήταν και παραμένει άγνωστη. Η αναφορά της εκτίμησης αυτής και μόνον, λανθασμένα θα μπορούσε να θεωρηθεί ως το ολοκληρωμένο αποτέλεσμα της μέτρησης. Κάθε εκτίμηση για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί με τρόπο ουσιαστικό πρέπει να συνοδεύεται και από μία παράμετρο που να δίνει την πληροφορία του πόσο καλή (ακριβής) θεωρείται η *εκτίμηση* (μέτρηση) αυτή. Γνώση της ποιότητας και αξιοπιστίας μίας μέτρησης είναι προφανώς απαραίτητη για την πραγματοποίηση ουσιαστικών συγκρίσεων και αναλύσεων μεταξύ αποτελεσμάτων διαφορετικών μετρήσεων. Στη μετρολογία, την επιστήμη των μετρήσεων, η παράμετρος αυτή ονομάζεται *αβεβαιότητα της μέτρησης*, και όταν συνοδεύει το αποτέλεσμα της μέτρησης με το οποίο σχετίζεται χαρακτηρίζει την *διασπορά* των τιμών που μπορούν *λογικά* να αποδοθούν στην μετρούμενη φυσική ποσότητα.

Παρόλο που στις περισσότερες των περιπτώσεων η γνώση της *ποιότητας* της μέτρησης είναι εξίσου σημαντική με το αποτέλεσμα της μέτρησης, δεν υπάρχει ένας και μοναδικός τρόπος για να υπολογίσει κανείς ποσοτικά την *αβεβαιότητα* μίας μέτρησης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να οδηγούμαστε μέχρι και σε αντικρουόμενα πολλές φορές αποτελέσματα, εάν και εφ' όσον δεν ακολουθούνται προσεκτικά κάποιες βασικές αρχές υπολογισμού της *αβεβαιότητας*. Η έλλειψη, στο παρελθόν, των ξεκάθαρα διατυπωμένων βασικών αρχών υπολογισμού της αβεβαιότητας έγινε αντιληπτό ότι αποτελούσε πρόβλημα όχι μόνο τυπικό αλλά και ουσιαστικό. Για την αποκατάσταση του προβλήματος αυτού το 1978 η διεθνής επιτροπή μέτρων και σταθμών ξεκίνησε την προσπάθεια της συγγραφής μιας τέτοιας οδηγίας, το αποτέλεσμα της οποίας ήταν το *"Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement",* στην οποία θα αναφερόμαστε και ως *GUM*[1].

Το *"Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement"* περιγράφει την μέθοδο διάδοσης των αβεβαιοτήτων (Law of Propagation of Uncertainties-*LPU*). Η οδηγία αυτή κάνοντας κάποιες παραδοχές που αφορούν το μοντέλο μέτρησης και τις στατιστικές κατανομές που περιγράφουν τις παραμέτρους που υπεισέρχονται σε αυτό παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο μπορεί κανείς από τις επιμέρους τυπικές αβεβαιότητες των παραμέτρων να υπολογίσει την συνολική τυπική αβεβαιότητα. Επίσης περιγράφει το πως μπορεί να υπολογιστεί κάτω από προϋποθέσεις η διευρυμένη συνολική αβεβαιότητα και πως τα αποτελέσματα αυτά πρέπει να παρουσιάζονται με τη χρήση των πινάκων αβεβαιοτήτων.

Στην εργασία αυτή σύντομα θα παρουσιάσουμε την μέθοδο διάδοσης των αβεβαιοτήτων επιμένοντας στις παραδοχές οι οποίες πρέπει να ισχύουν ώστε ανεπιφύλακτα να εφαρμόζονται οι οδηγίες του *GUM*. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο αριθμητικές μέθοδοι Monte Carlo μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των αβεβαιοτήτων χρησιμοποιώντας την μέθοδο διάδοσης των κατανομών πιθανότητας (propagation of probability distributions)[2]. Η χρήση των αριθμητικών μεθόδων λόγω της σημερινής υπολογιστικής δύναμης των προσωπικών υπολογιστών μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα περισσότερα μοντέλα μέτρησης και να αποτελέσει μία γρήγορη μέθοδο για την επιβεβαίωση (validation) ή ακόμη και την αντικατάσταση των αναλυτικών μεθόδων υπολογισμού της αβεβαιότητας. Τέλος θα παρουσιάσουμε παραδείγματα όπου οι δύο μέθοδοι καταλήγουν σε διαφορετικά αποτελέσματα, ώστε να καταστεί προφανές ότι οι μέθοδοι που περιγράφονται στο *GUM* πρέπει να εφαρμόζονται μόνο όταν όλες οι προϋποθέσεις εφαρμογής τους πληρούνται.

2. Μέθοδος διάδοσης των αβεβαιοτήτων

Η μέθοδος διάδοσης των αβεβαιοτήτων[1, 3-5], ως πρώτο βήμα έχει την επιλογή του μαθηματικού μοντέλου το οποίο περιγράφει τη πειραματική μέτρηση και ως δεύτερο την εκτίμηση των τυπικών αβεβαιοτήτων, $u(x_i)$, όλων των παραμέτρων (x_i) που υπεισέρχονται στο μοντέλο. Όπως αναφέρεται και στην υποπαράγραφο 3.3.5 του *GUM*[1] η εκτίμηση γίνεται για Τύπου Α τυπικές αβεβαιότητες από τις κατανομές της πυκνότητας συχνότητας όπως αυτές προκύπτουν από τις πειραματικές μετρήσεις, και για Τύπου Β από τις κατ' εκτίμηση κατανομές τις οποίες αποφασίζει ο εκτελών την μέτρηση. Ο τρόπος επιλογής των κατανομών για κάποιες περιπτώσεις που συχνά εμφανίζονται κατά την διάρκεια μετρήσεων δίνεται στον Πίνακα 1, παρόλο που στις περισσότερες περιπτώσεις η επιλογή αυτή βασίζεται στη γνώση και εμπειρία αυτού που εκτελεί τις μετρήσεις.

Πίνακας 1. Επιλογή κατανομών πυκνότητας πιθανότητας

Διαθέσιμη πληροφορία που αφορά την παράμετρο x_i.	**Κατανομή πυκνότητας πιθανότητας που αποδίδεται στη παράμετρο x_i.**
Αναμενόμενη τιμή x και τυπική αβεβαιότητα $u(x)$.	Κανονική / Gaussian κατανομή.
οι ανεξάρτητες τιμές μετρήσεων που ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέσω όρο $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s.	t-κατανομή με n-1 βαθμούς ελευθερίας.
Τα άκρα (α, β) ενός διαστήματος μέσα στα οποία μεταβάλλεται η παράμετρος x_i.	Τετραγωνική κατανομή με άκρα (α, β).
Τα άκρα (α, β) ενός διαστήματος μέσα στα οποία μεταβάλλεται η παράμετρος x_i με ημιτονοειδή μορφή.	Arcsine κατανομή (U-shaped κατανομή).
Αναμενόμενη τιμή x μιας παραμέτρου που παίρνει μόνο θετικές τιμές.	Εκθετική κατανομή.

Στη συνέχεια θεωρώντας ότι η συνάρτηση που περιγράφει το μοντέλο της πειραματικής μέτρησης είναι η $y = F(x_1, x_2 ... x_N)$, όπου x_i είναι οι μετρήσιμες ποσότητες και παράμετροι του μοντέλου, η συνολική τυπική αβεβαιότητα, $u(y)$, δίνεται σαν συνάρτηση των επιμέρους τυπικών αβεβαιοτήτων, $u(x_i)$, (μέθοδος διάδοσης αβεβαιοτήτων) από την εξίσωση

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} [c_i \cdot u(x_i)]^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i \cdot c_j \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r(x_i, x_j)} \qquad (1)$$

όπου $c_i = \left.\frac{\partial F}{\partial X_i}\right|_{x_i}$ και $r(x_i,x_j)$ ο συντελεστής συσχέτισης, η οποία για την περίπτωση που οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους απλοποιείται σε

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} [c_i \cdot u(x_i)]^2} \qquad (2)$$

Τέλος μετά και τον υπολογισμό των ενεργών βαθμών ελευθερίας[1] κάνοντας χρήση της κατανομής Student υπολογίζεται η διευρυμένη αβεβαιότητα, $U(y)$, για το απαιτούμενο ποσοστό εμπιστοσύνης, $U(y)=k\ u(y)$, όπου k είναι ο συντελεστής επικάλυψης που αντιστοιχεί στους ενεργούς βαθμούς ελευθερίας που υπολογίσαμε και το ζητούμενο ποσοστό εμπιστοσύνης. Το διάστημα εμπιστοσύνης ή με άλλα λόγια το διάστημα που εμπεριέχει όλες τις τιμές που μπορούν *λογικά* (ποσοστό εμπιστοσύνης) να αποδοθούν στην μετρούμενη φυσική ποσότητα δίνεται από $(\bar{y} - U(y), \bar{y} + U(y))$ ή $Y = \bar{y} \pm U(Y)$, όπου $\bar{y}$ η μέση τιμή της μετρούμενης ποσότητας, θεωρώντας ότι η κατανομή των αποτελεσμάτων είναι Gaussian ή Student με αναμενόμενη τιμή ίση με $\bar{y}$ και τυπική απόκλιση ίση με $u(y)$.

Αναφερόμενοι τώρα στις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες οι παραπάνω υπολογισμοί οδηγούν σε προβλήματα πρέπει κανείς να έχει πάντα υπόψη του ότι:

- Οι Εξισώσεις 1 και 2 προκύπτουν μετά από ανάπτυξη σε σειρά Taylor της εξίσωσης που περιγράφει την πειραματική μέτρηση και κρατώντας μόνο τους γραμμικούς όρους. Συνεπώς σε περιπτώσεις όπου η μέτρηση δεν περιγράφεται από γραμμική ή σχεδόν γραμμική εξίσωση πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή για το αν όροι μεγαλύτερης τάξης πρέπει να ληφθούν υπόψη.

- Οι προϋποθέσεις του κεντρικού οριακού θεωρήματος (central limit theorem) πρέπει να πληρούνται. Το θεώρημα αυτό μας λέει ότι η κατανομή του αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών που δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή τείνει ασυμπτωτικά προς την κανονική κατανομή καθώς ο αριθμός των μεταβλητών μεγαλώνει. Όσο πιο κοντά στην κανονική κατανομή είναι οι επιμέρους κατανομές και όσο πιο παρόμοια είναι τα εύροι των κατανομών τόσο λιγότερες μεταβλητές απαιτούνται ώστε η κατανομή του αθροίσματος να είναι σχεδόν κανονική.

- Οι κατανομές που υπεισέρχονται ή προκύπτουν από τους υπολογισμούς πρέπει να είναι συμμετρικές. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δίνεται σε μη συμμετρικές κατανομές όπως αυτές που συναντώνται σε εφαρμογές ακουστικών, ηλεκτρικών και οπτικών μετρήσεων όπου συχνά χρησιμοποιούνται και μιγαδικές μεταβλητές.

- Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δίνεται όταν υπάρχει μία συνιστώσα της οποίας η τυπική αβεβαιότητα είναι τόσο μεγάλη ώστε να κυριαρχεί όλων των άλλων έτσι ώστε να είναι συγκρίσιμη με το τελικό αποτέλεσμα.

3. Μέθοδος διάδοσης κατανομών πιθανότητας – Αριθμητικές Μέθοδοι

Όπως και στη μέθοδο διάδοσης των αβεβαιοτήτων, έτσι και κατά την χρήση των αριθμητικών μεθόδων[2] (Monte Carlo Simulation-*MCS*) το πρώτο βήμα είναι να αποφασιστεί το μαθηματικό μοντέλο, $y = F(x_1, x_2 ... x_N)$, που περιγράφει διαδικασία των μετρήσεων και συνδέει τις παραμέτρους εισόδου (x_i) με τις παραμέτρους εξόδου (y - αποτέλεσμα μέτρησης). Αμέσως μετά και πάλι επιλέγονται οι κατανομές που περιγράφουν τις παραμέτρους εισόδου δημιουργώντας έτσι το κοινό σημείο εκκίνησης υπολογισμού των αβεβαιοτήτων με αυτό της μεθόδου διάδοσης των αβεβαιοτήτων.

Στην συνέχεια παράγει κανείς M ανεξάρτητες τυχαίες τιμές για κάθε μία από τις N παραμέτρους χρησιμοποιώντας την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής που περιγράφει την κάθε παράμετρο, δημιουργώντας έτσι M σημεία του δειγματικού χώρου $\{(x_{11}, x_{21} ... x_{N1}), (x_{12}, x_{22} ... x_{N2}), \ldots, (x_{1M}, x_{2M} ... x_{NM})\}$. Για κάθε ένα από τα σημεία του δειγματικού χώρου υπολογίζουμε την τιμή y_i που προκύπτει από το μαθηματικό μοντέλο. Χρησιμοποιώντας τις τιμές y_i για μεγάλο αριθμό M δημιουργούμε την προσέγγιση της συνάρτησης αθροιστικής πυκνότητας πιθανότητας από την οποία υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή, την τυπική απόκλιση, καθώς και το διάστημα εμπιστοσύνης[2] για το απαιτούμενο ποσοστό εμπιστοσύνης.

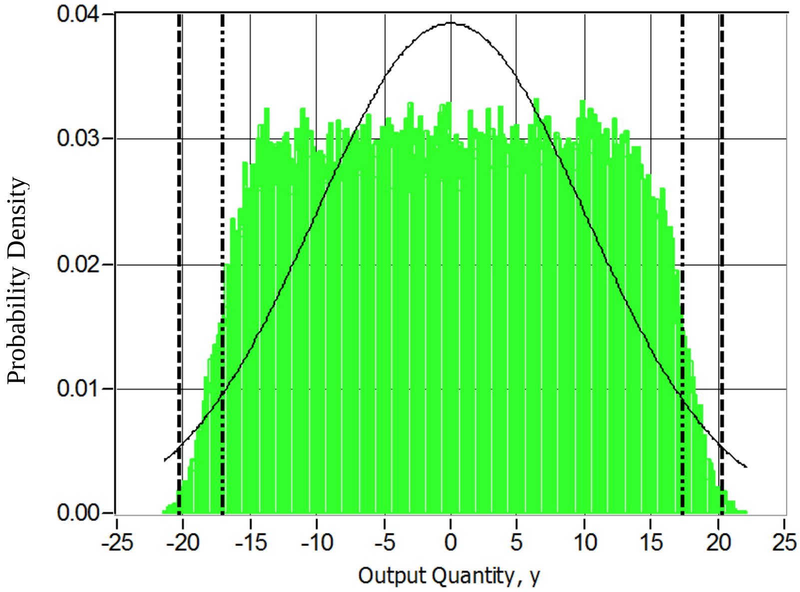
Στα παρακάτω παραδείγματα όπου γίνεται σύγκριση των δύο παραπάνω μεθόδων χρησιμοποιούνται ο “Hill-Wichmann rectangular pseudo-random number generator” για την δημιουργία τετραγωνικών κατανομών και ο “Box-Muller Gaussian pseudo-random number generator” για την δημιουργία κανονικών κατανομών[2]. Για την δημιουργία τριγωνικών και τραπεζοειδών κατανομών χρησιμοποιούμε το άθροισμα δύο κατάλληλων τετραγωνικών κατανομών και για την δημιουργία arcsine κατανομών χρησιμοποιούμε την εξίσωση Q=a+b(1-cosZ), όπου Z είναι τετραγωνική κατανομή στο διάστημα (-π,π)[5]. Τέλος το διάστημα εμπιστοσύνης υπολογίζεται ως το μικρότερο διάστημα μέσα στο οποίο εμπεριέχεται ποσοστό σημείων του δειγματικού χώρου ίσο με αυτό του απαιτούμενου ποσοστού εμπιστοσύνης.

Για την σύγκριση των δύο μεθόδων χρησιμοποιούμε τα ακραία σημεία των διαστημάτων εμπιστοσύνης όπως αυτά προκύπτουν από τις δύο μεθόδους. Μια και στους υπολογισμούς αβεβαιότητας θεωρούμε ότι ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων (n_{dig}) που έχουν ουσιαστική σημασία λόγω όλων των παραδοχών που γίνονται είναι συνήθως ένα ή δύο (n_{dig}=1 ;ή n_{dig}=2) και όχι παραπάνω, κατά τη σύγκριση των δύο μεθόδων στα παρακάτω παραδείγματα θα θεωρούμε ότι υπάρχει συμφωνία όταν αυτή έχει ακρίβεια δύο σημαντικών ψηφίων. Για το λόγο αυτό γράφουμε τη τυπική αβεβαιότητα με την μορφή $a \times 10^r$, όπου α είναι ένας ακέραιος με n_{dig}-ψηφία και r ακέραιος και θεωρούμε ότι διαφορές μικρότερες από $\delta = 0.5 \times 10^r$ είναι αμελητέες[2].

4. Παραδείγματα σύγκρισης των δύο μεθόδων

4.1 Απλό αθροιστικό μοντέλο.

Στο παράδειγμα αυτό (Πίνακας 2 και Σχήμα 1) παρουσιάζονται τα συγκριτικά αποτελέσματα όπως αυτά προκύπτουν από την σύγκριση των δύο παραπάνω μεθόδων, της μεθόδου διάδοσης των αβεβαιοτήτων (Law of Propagation of Uncertainties-*LPU*), Εξισώσεις 1 και 2, και της μεθόδου Monte Carlo Simulation-*MCS* για μία μέτρηση η οποία περιγράφεται από το άθροισμα τεσσάρων τετραγωνικών κατανομών μία από τις οποίες έχει πολύ μεγαλύτερο εύρος από τις άλλες ($Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, μέση τιμή όλων των μεταβλητών ίση με μηδέν και τυπική αβεβαιότητα $u(x_1)$=10 και $u(x_2)$=$u(x_3)$=$u(x_4)$=1). Με άλλα λόγια μία κατανομή επικρατεί όλων των άλλων και οι προϋποθέσεις του κεντρικού οριακού θεωρήματος δεν πληρούνται πλήρως.



Σχήμα 1. Κατανομή της παραμέτρου εξόδου όπως υπολογίζεται με την μέθοδο διάδοσης των αβεβαιοτήτων (συνεχής μαύρη γραμμή) και από Monte Carlo Simulation (ιστόγραμμα) για το απλό αθροιστικό μοντέλο της παραγράφου 4.1. Οι διακεκομμένες και διακεκομμένες με τελείες γραμμές ορίζουν διάστημα εμπιστοσύνης όπως αυτό προκύπτει από τις δύο μεθόδους αντίστοιχα. Κατά τον αριθμητικό υπολογισμό M=10^5 σημεία χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων με την μέθοδο Monte Carlo.

Πίνακας 2. Αποτελέσματα απλού αθροιστικού μοντέλου.

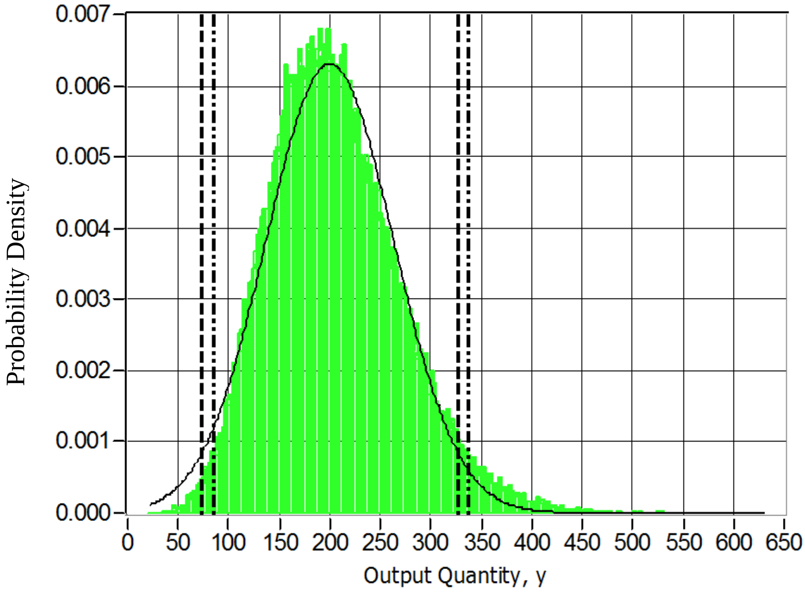
Μέθοδος	*y*	*u*(*y*)	Διευρυμένη Αβεβαιότητα (*U*)	Διάστημα Εμπιστοσύνης 95.45 %
MCS	0.00	10.15		-17.0, 17.4
LPU	0.00	10.15	20.30	-20.3, 20.3

Από το Σχήμα 1 φαίνεται ότι λόγω του ότι οι προϋποθέσεις της μεθόδου που περιγράφεται στο *GUM* δεν ισχύουν πλήρως, η κατανομή του αποτελέσματος δεν είναι Gaussian ή σχεδόν Gaussian. Επίσης, από τον Πίνακα 2 βλέπουμε ότι αν λάβουμε υπόψη μας στη σύγκριση δύο σημαντικά ψηφία, τότε τα αποτελέσματα των διαστημάτων εμπιστοσύνης των δύο μεθόδων δεν συμφωνούν μεταξύ τους, παρόλο που οι δύο μέθοδοι συμφωνούν σε ότι αφορά τα αποτελέσματα της μέσης τιμής καθώς και της συνολικής τυπικής αβεβαιότητας.

4.2 Απλό μη γραμμικό μοντέλο

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το διάστημα που διήνυσε ένα αυτοκίνητο που ξεκινά από την ηρεμία και επιταχύνει με σταθερή επιτάχυνση α=1±0.1 m/s^2, για t=20±3 *sec* τα οποία τα μετρούμε με ένα απλό ρολόι. Η εξίσωση που περιγράφει τον υπολογισμό της απόστασης (d) που διένυσε το αυτοκίνητο είναι:

$$d = \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (3)$$



Σχήμα 2. Κατανομή της παραμέτρου εξόδου όπως υπολογίζεται με την μέθοδο διάδοσης των αβεβαιοτήτων (συνεχής μαύρη γραμμή) και από Monte Carlo Simulation (ιστόγραμμα) για το μη γραμμικό μοντέλο της παραγράφου 4.2, Οι διακεκομμένες και διακεκομμένες με τελείες γραμμές ορίζουν διάστημα εμπιστοσύνης όπως αυτό προκύπτει από τις δύο μεθόδους αντίστοιχα. Κατά τον αριθμητικό υπολογισμό M=10^5 σημεία χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων με την μέθοδο Monte Carlo.

Θεωρώντας ότι οι κατανομές που περιγράφουν το χρόνο και την επιτάχυνση του αυτοκινήτου είναι κανονικές (Gaussian) τα αποτελέσματα της σύγκρισης των δύο μεθόδων (της μεθόδου διάδοσης των αβεβαιοτήτων, Εξίσωση 2 και της μεθόδου Monte Carlo Simulation-*MCS*) δίνονται στο Σχήμα 2 και στον Πίνακα 3, όπου βλέπει κανείς ότι λόγω της μη γραμμικότητας του μοντέλου και της μη λήψης όρων μεγαλύτερης τάξης στην Εξίσωση 2, διαφέρουν όχι μόνο τα διαστήματα εμπιστοσύνης αλλά και τα αποτελέσματα των μέσων τιμών των δύο μεθόδων.

Πίνακας 3. Αποτελέσματα μη γραμμικού μοντέλου, Θεωρώντας ότι οι κατανομές που περιγράφουν το χρόνο και την επιτάχυνση του αυτοκινήτου είναι Gaussian.

Μέθοδος	*y (m)*	*u*(*y*) *(m)*	Διευρυμένη Αβεβαιότητα (*U*) *(m)*	Διάστημα Εμπιστοσύνης 95.45 % *(m)*
MCS	204.5	63.96		85.9, 336.2
LPU	200.0	63.25	126	73.5, 326.5

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η σύγκριση αναλυτικών (όπως αυτές περιγράφονται στο “Guide to the expression of uncertainty in measurement”-*GUM*) και αριθμητικών (Monte Carlo) μεθόδων υπολογισμού της αβεβαιότητας μέτρησης οδηγούν σε αποτελέσματα που συμφωνούν μεταξύ τους μόνον όταν όλες οι προϋποθέσεις εφαρμογής του αναλυτικού υπολογισμού πληρούνται. Συνεπώς προσεκτικός έλεγχος των περιπτώσεων όπου εφαρμόζεται η μέθοδος διάδοσης των αβεβαιοτήτων πρέπει πάντα να προηγείται. Η χρήση της μεθόδου Monte Carlo από την άλλη μεριά λόγω της σημερινής υπολογιστικής δύναμης των προσωπικών υπολογιστών μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα περισσότερα μοντέλα μέτρησης και να αποτελέσει μία γρήγορη μέθοδο για την επιβεβαίωση (validation) ή ακόμη και την αντικατάσταση των αναλυτικών μεθόδων υπολογισμού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] ISO, *Guide to the expression of uncertainty in measurement.* (International Organization for Standardization, 1995).

[2] ISO, *Guide to the expression of uncertainty in measurement. Supplement 1. Numerical methods for the propagation of distributions* (International Organization for Standardization, 2004).

[3] EA-4/02, *Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration* (European co-operation for Accreditation, 1999).

[4] C. F. Dietrich, *Uncertainty, Calibration and Probability* (Adam Hilger, Bristol, 1991).

[5] I. Lira, *Evaluating the Measurement Uncertainty* (IOP, Bristol and Philadelphia, 2002).