Ελληνικό Ινστιτούτο Μετρολογίας

Δ/νση Μηχανικών Μεγεθών

Η ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

Χ. Μήτσας, Ζ. Μεταξιώτου, Α. Λευκόπουλος και Γ. Ναβροζίδης

ΤΕΧΝΙΚΗ ΟΔΗΓΙΑ ΕΙΜ-ΜΜ-01

ΘΕΣ/ΝΙΚΗ, ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2004

Ελληνικό Ινστιτούτο Μετρολογίας, Βιομηχανική Περιοχή Θεσ/νίκης, Οικ. Τετ. 45, Σίνδος 57022 Θεσ/νίκη
Τηλ. :+30 2310 569 999, FAX: +30 2310 569 996, email: mail@eim.org.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ελληνικό
Ινστιτούτο
Μετρολογίας

Η ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

Χ. Μήτσας, Ζ. Μεταξιώτου, Α. Λευκόπουλος και Γ. Ναβροζίδης

ΤΕΧΝΙΚΗ ΟΔΗΓΙΑ ΕΙΜ-ΜΜ-01

ΘΕΣ/ΝΙΚΗ, ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2004

Αντικείμενο

Η παρούσα Τεχνική Οδηγία αφορά στην εκτίμηση της μετρητικής αβεβαιότητας σε διακριβώσεις μηχανικών μεγεθών. Μέσω της Οδηγίας παρουσιάζεται η φιλοσοφία και η μεθοδολογία υπολογισμού αβεβαιοτήτων σύμφωνα με την θεώρηση του ISO "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements" (1995) με σκοπό την πιο ρεαλιστική και αξιόπιστη εκτίμηση μετρητικής αβεβαιότητας για εργαστήρια δοκιμών και διακριβώσεων που είναι διαπιστευμένα ή επιζητούν διαπίστευση σύμφωνα με τις απαιτήσεις του προτύπου EN ISO/IEC 17025 "General Requirements for the Competence of Testing and Calibration Laboratories" (1999). Επιπλέον, στα Παραρτήματα παρουσιάζονται ορισμένα ειδικά θέματα που αφορούν κυρίως στην αντιμετώπιση των αβεβαιοτήτων ΤΥΠΟΥ Α καθώς και παραδείγματα κατάρτισης ισοζυγίων αβεβαιότητας σε μετρήσεις μηχανικών μεγεθών

1. Εισαγωγή

Η διαδικασία της μέτρησης είναι τόσο παλιά όσο και η ανθρώπινη ύπαρξη. Σήμερα, οι μετρήσεις που γίνονται καθημερινά αποτελούν το μέσο προαγωγής της επιστημονικής έρευνας και των τεχνολογικών κατακτήσεων ταυτόχρονα επηρεάζοντας βαθύτατα την ζωή κάθε ανθρώπου σε όλες τις εκφάνσεις της. Η εξέλιξη της τεχνολογίας την τελευταία εικοσαετία έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση τόσο των δυνατοτήτων όσο και των απαιτήσεων που αφορούν στην ακρίβεια με την οποία πραγματοποιούνται μετρήσεις ενώ η τάση τους συνεχίζει να είναι αυξητική.

Η αξιολόγηση της ορθότητας ενός μετρητικού αποτελέσματος από την απαρχή των σύγχρονων φυσικών επιστημών απασχόλησε τον κλάδο της μετρολογίας και εξακολουθεί σήμερα να εμφανίζεται ως το κεντρικό ερώτημα της αποτίμησης μετρητικών αποτελεσμάτων. Στο παρελθόν, πηγές συστηματικών και τυχαίων μετρητικών σφαλμάτων θεωρούνταν η αιτία του λιγότερο ή περισσότερο ακριβούς προσδιορισμού μιας ποσότητας. Βάσει αυτής της άποψης τα μετρητικά σφάλματα περιγράφουν την απόκλιση μιας μέτρησης από την «πραγματική τιμή» της ποσότητας. Δεδομένου όμως ότι ο προσδιορισμός της «πραγματικής τιμής» της ποσότητας είναι και ο σκοπός πραγματοποίησης της μέτρησης, ο ορισμός των μετρητικών σφαλμάτων σε σχέση με αυτή την άγνωστη «πραγματική τιμή» προκαλεί εννοιολογικά προβλήματα στην κατανόηση της ορθότητας του αποτελέσματος.

Αναγνωρίζοντας αυτό το πρόβλημα καθώς επίσης και το γεγονός ότι δεν υπάρχει ένας και μοναδικός τρόπος ποσοτικής έκφρασης της αμφιβολίας για την ορθότητα ενός μετρητικού αποτελέσματος, η Διεθνής Συνέλευση Μέτρων και Σταθμών (CIPM), που είναι η ανώτατη επιτροπή για θέματα μετρολογίας, το 1978 ζήτησε από το εκτελεστικό της όργανο, το Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών (BIPM), να καθορίσει συμφωνημένες θεμελιώδεις αρχές που θα αφορούσαν στο πρόβλημα έκφρασης και υπολογισμού της διασποράς των τιμών ενός μετρούμενου μεγέθους (measurand)* σε σχέση με την καλύτερη εκτίμησή του. Ταυτόχρονα, υιοθετήθηκε ο όρος «μετρητική αβεβαιότητα» για την περιγραφεί αυτής της διασποράς των τιμών. Αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας ήταν η έκδοση της σύστασης INC-1 το 1980. Οι γενικές αρχές που περιέχονταν στην παραπάνω σύσταση διαμορφώθηκαν στην συνέχεια σε μία πρακτική

---

* Ο ακριβής ορισμός του μετρούμενου μεγέθους καθώς και άλλων όρων που εμφανίζονται στην οδηγία αυτή υπάρχουν στο ISO "International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology", 2nd ed. 1993.

τεχνική οδηγία από την Τεχνική Συμβουλευτική Επιτροπή στην Μετρολογία (TAG 4) του διεθνούς οργανισμού ISO σε συνεργασία με το BIPM, το IEC και το OIML και το 1993 εκδόθηκε το “Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement” ή ISO “GUM”. Το 1995 επανεκδόθηκε διορθωμένο το “GUM” [1] ενώ πρόσφατα, το 2004, παρουσιάστηκε η πρόχειρη έκδοση του πρώτου συμπληρώματος με τίτλο “Numerical Methods for the Propagation of Distributions” [2], περιγραφή της μεθοδολογίας του οποίου υπάρχει στο Παράρτημα Ε αυτής της οδηγίας.

Η φιλοσοφία του “GUM” διαφέρει από την κλασσική θεώρηση της απόκλισης από την «πραγματική τιμή» λόγω πηγών μετρητικών σφαλμάτων. Κεντρική ιδέα του είναι η όσο το δυνατόν πληρέστερη αποτύπωση της γνώσης που αφορά σε μια συγκεκριμένη μετρητική διεργασία συμπεριλαμβανομένων και των συνθηκών κάτω από τις οποίες αυτή πραγματοποιείται. Βάσει αυτής της προσέγγισης, η ποσότητα που πρόκειται να μετρηθεί προϋπάρχει της πραγματοποίησης της μέτρησης ως φυσικό αντικείμενο και αποτελεί το αίτιο για συγκεκριμένα μετρητικά αποτελέσματα με την μορφή ενδείξεων μιας μετρητικής διάταξης. Αντίθετα, η τιμή του μετρούμενου μεγέθους δεν υπάρχει από πριν αλλά καθορίζεται και αποδίδεται στην ποσότητα η οποία θα μετρηθεί, μέσω της μέτρησης. Η απόδοση αυτή γίνεται συγκρίνοντάς την με μία ποσότητα η τιμή της οποίας είναι γνωστή και συνεπώς η ορθότητα του προσδιορισμού του μετρούμενου μεγέθους ανάγεται στα εξής ερωτήματα: α) κατά πόσο η σύγκριση αντιπροσωπεύει την ισότητα μεταξύ του μετρούμενου μεγέθους και της ποσότητας αναφοράς και β) με πόση ακρίβεια είναι γνωστή η ποσότητα αναφοράς δεδομένου ενός γενικά αποδεκτού συστήματος μονάδων. Η αδυναμία ακριβούς απάντησης στα παραπάνω δύο ερωτήματα είναι και η πηγή αβεβαιότητας στον προσδιορισμό της τιμής του μετρούμενου μεγέθους. Βάσει λοιπόν των παραπάνω προβληματισμών ο αποδεκτός σήμερα ορισμός της μετρητικής αβεβαιότητας είναι:

Μία παράμετρος που σχετίζεται με το αποτέλεσμα της μέτρησης (βάσει της διαθέσιμης πληροφορίας για αυτή) και χαρακτηρίζει την διασπορά των τιμών που θα μπορούσαν λογικά να αποδοθούν στην μετρούμενη ποσότητα.

2. Εκτίμηση της Μετρητικής Αβεβαιότητας κατά το ISO “GUM”

2.1 Η Τυπική Αβεβαιότητα της Μέτρησης

Η μέθοδος που χρησιμοποιείται για την υλοποίηση της κεντρικής ιδέας του “GUM”, δηλ. την πληρέστερη αποτύπωση της γνώσης που αφορά σε μια συγκεκριμένη μετρητική διεργασία, στηρίζεται στην περιγραφή της διαθέσιμης γνώσης για όλα τα σχετικά μεγέθη που υπεισέρχονται σε αυτή με κατανομές πιθανοτήτων. Αυτές, μαζί με την σχεδόν ακριβή γνώση των φυσικών σχέσεων που υλοποιούνται κατά την μέτρηση επιτρέπουν την εξαγωγή στατιστικά «ακριβών» συμπερασμάτων για το αποτέλεσμα της μέτρησης.

Γενικώς, μπορεί να αποδειχθεί [3] ότι ένα μέγεθος X μπορεί πάντα να περιγραφεί από μία κατανομή πιθανοτήτων η οποία είναι αντιπροσωπευτική και συμβατή με τον βαθμό γνώσης του μεγέθους. Η καλύτερη εκτίμησή x, για το μέγεθος προκύπτει από την αναμενόμενη τιμή (expectation) E[X] της κατανομής ενώ η αβεβαιότητά της εκτιμάται από την τυπική απόκλιση της κατανομής ως: $u(x) = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$, όπου Var[X] είναι η διακύμανσή (variance) της. Επειδή η μετρητική αβεβαιότητα που προσδιορίζεται με αυτόν τον τρόπο σχετίζεται με την τυπική απόκλιση, αποκαλείται τυπική αβεβαιότητα της μέτρησης.

2.2 Τρόποι Υπολογισμού της Τυπικής Αβεβαιότητας

Σύμφωνα με το "GUM" ο υπολογισμός της τυπικής αβεβαιότητας των μετρούμενων μεγεθών θα πρέπει πάντοτε να είναι συμβατός με τον βαθμό γνώσης ή διαθέσιμης πληροφορίας σχετικά με τα μεγέθη αυτά. Για τον λόγο αυτό οι τρόποι υπολογισμού των εκτιμήσεων αριθμητικών τιμών χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, ήτοι, αυτές που:

- υπολογίζονται από στατιστική ανάλυση σειράς παρατηρήσεων
- υπολογίζονται με χρήση άλλων μεθόδων

Ο πρώτος τρόπος υπολογισμού ονομάζεται **ΤΥΠΟΥ Α** και μεταξύ άλλων περιλαμβάνει την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (Παράρτημα Δ) και την ανάλυση διακύμανσης (ANOVA). Ο δεύτερος τρόπος ονομάζεται **ΤΥΠΟΥ Β** και βασίζεται στην χρήση επιστημονικής κρίσης χρησιμοποιώντας όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες που μπορεί να περιλαμβάνουν:

- προγενέστερα μετρητικά αποτελέσματα
- εμπειρία, ή γενική γνώση της συμπεριφοράς και των ιδιοτήτων των σχετικών υλικών ή μετρητικών οργάνων
- προδιαγραφές κατασκευαστών
- αποτελέσματα από πιστοποιητικά ή εκθέσεις διακρίβωσης
- τιμές αναφοράς και αβεβαιότητες από βιβλιογραφία

Σε αυτό το σημείο πρέπει να γίνουν ορισμένες διευκρινήσεις. Κατ' αρχή οι όροι «τυχαία» και «συστηματική» αβεβαιότητα πρέπει να αποφεύγονται γιατί η φύση της συνιστώσας αβεβαιότητας καθορίζεται από τον τρόπο με τον οποίο ένα μέγεθος εμφανίζεται κάθε φορά στο μετρητικό μοντέλο που περιγράφει την μετρητική διεργασία. Έτσι, ένα μέγεθος που συνεισφέρει με τυχαίο τρόπο σε μία περίπτωση, μπορεί σε κάποια άλλη να συνεισφέρει με συστηματικό. Επομένως, γίνεται αντιληπτό ότι δεν υπάρχει πάντοτε μία απλή αντιστοιχία μεταξύ της κατηγοριοποίησης της αβεβαιότητας βάσει του τρόπου υπολογισμού της σε Α και Β και του συχνά, αλλά παραπλανητικά, χρησιμοποιούμενου διαχωρισμού των συνιστωσών της σε «τυχαίες» και «συστηματικές».

2.2.1 Τρόπος Υπολογισμού Τύπου Α

Ο τρόπος υπολογισμού τύπου Α βασίζεται σε στατιστικές μεθόδους επεξεργασίας μετρητικών αποτελεσμάτων. Έστω ότι για τον προσδιορισμό του μετρούμενου μέγεθος Y πραγματοποιούνται n ανεξάρτητες παρατηρήσεις y_1, y_2, y_3, ….,y_i, ….,y_n. Οι τιμές των παρατηρήσεων y_i διαφέρουν μεταξύ τους εξαιτίας των τυχαίων μεταβολών των συνθηκών της μέτρησης. Τότε η αναμενόμενη τιμή του μεγέθους Y είναι ο αριθμητικός μέσος των n παρατηρήσεων

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (1)$$

Οι n ανεξάρτητες παρατηρήσεις απαρτίζουν μία κατανομή πιθανοτήτων (Παράρτημα A) με εύρος το οποίο εκτιμάται από την διακύμανση (variance) των πειραματικών παρατηρήσεων και δίνεται από την σχέση

$$\mathrm{Var}\ (y) = s(y)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2 \qquad (2)$$

Η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης είναι η τυπική απόκλιση της μεμονωμένης παρατήρησης (μέτρησης) και χαρακτηρίζει την διασπορά των παρατηρήσεων. Η καλύτερη εκτίμηση της μετρητικής αβεβαιότητας δίνεται από την τυπική απόκλιση του μέσου ως

$$u(\overline{y}) = s(\overline{y}) = \frac{s(y)}{\sqrt{n}} \qquad (3)$$

που χαρακτηρίζει την διασπορά των εκτιμήσεων $\overline{y}$, του μεγέθους Y.

Στην περίπτωση που το πλήθος των επαναλαμβανόμενων ανεξάρτητων μετρήσεων δεν αρκετά μεγάλο, π.χ. $n < 10$, τότε η αξιοπιστία της εκτίμησης της τυπικής απόκλισης του μέσου, $s(\overline{y})$, μπορεί να τεθεί σε αμφισβήτηση. Για την αντιμετώπιση αυτού του ενδεχομένου χρησιμοποιούνται συμπληρωματικά και άλλες στατιστικές μέθοδοι, όπως αυτή των δραστικών βαθμών ελευθερίας (παρ. 4), για αύξηση της αξιοπιστίας του προσδιορισμού της μετρητικής αβεβαιότητας.

Στην περίπτωση που μία μετρητική διεργασία βρίσκεται υπό στατιστικό έλεγχο [4], η καλύτερη εκτίμηση της υπάρχουσας μεταβλητότητας μπορεί να θεωρηθεί η συγκεντρωτική τυπική απόκλιση (pooled standard deviation) s_p, που προκύπτει από τον συνδυασμό των επιμέρους τυπικών αποκλίσεων από m διαφορετικές περιστάσεις επαναλαμβανόμενης μέτρησης του συγκεκριμένου μεγέθους Y. Η περίπτωση αυτή είναι η συνήθης σε εργαστήρια όπου εκτελούνται συγκεκριμένες μετρήσεις με μεγάλη συχνότητα επανάληψης κάτω από σαφώς καθορισμένες συνθήκες ώστε η μετρητική διεργασία να μπορεί να θεωρηθεί χαρακτηρισμένη. Τότε, η διακύμανση από την οποία προκύπτει η συγκεντρωτική τυπική αβεβαιότητα δίνεται από την σχέση

$$s_p^2 = \frac{\sum_m \nu_i s_i^2}{\sum_m \nu_i} \qquad (4)$$

όπου ν_i είναι ο αριθμός των μετρήσεων από τον οποίο προέκυψε η κάθε μία τυπική απόκλιση s_i. Η εκτίμηση της μετρητικής αβεβαιότητας δίνεται ως

$$u(\overline{y}) = \frac{s_p}{\sqrt{n}} \qquad (5)$$

2.2.2 Τρόπος Υπολογισμού Τύπου Β

Η μέθοδος με την οποία γίνονται εκμεταλλεύσιμες οι διαθέσιμες πληροφορίες που αφορούν μία συγκεκριμένη μέτρηση στηρίζεται στην θεωρία πιθανοτήτων και στην αποτύπωση της γνώσης σε σχέση με αυτήν από μία συνάρτηση κατανομής πιθανοτήτων (Παράρτημα Α). Η αντιμετώπιση αυτή είναι αντικείμενο της στατιστικής θεώρησης κατά Bayes [5]. Πρακτικά, οι κατανομές οι οποίες χρειάζονται για την περιγραφή του βαθμού γνώσης επιλέγονται, ανάλογα με την περίπτωση, ανάμεσα από τις ακόλουθες:

α) Τετραγωνική κατανομή (Σχήμα 1.α) με πλάτος $2\Delta a = a_+ - a_-$, με την υπόθεση ότι η τιμή του μεγέθους X βρίσκεται μεταξύ δύο ακραίων τιμών a_+ και a_-. Η αναμενόμενη τιμή και διακύμανση δίνονται αντίστοιχα ως:

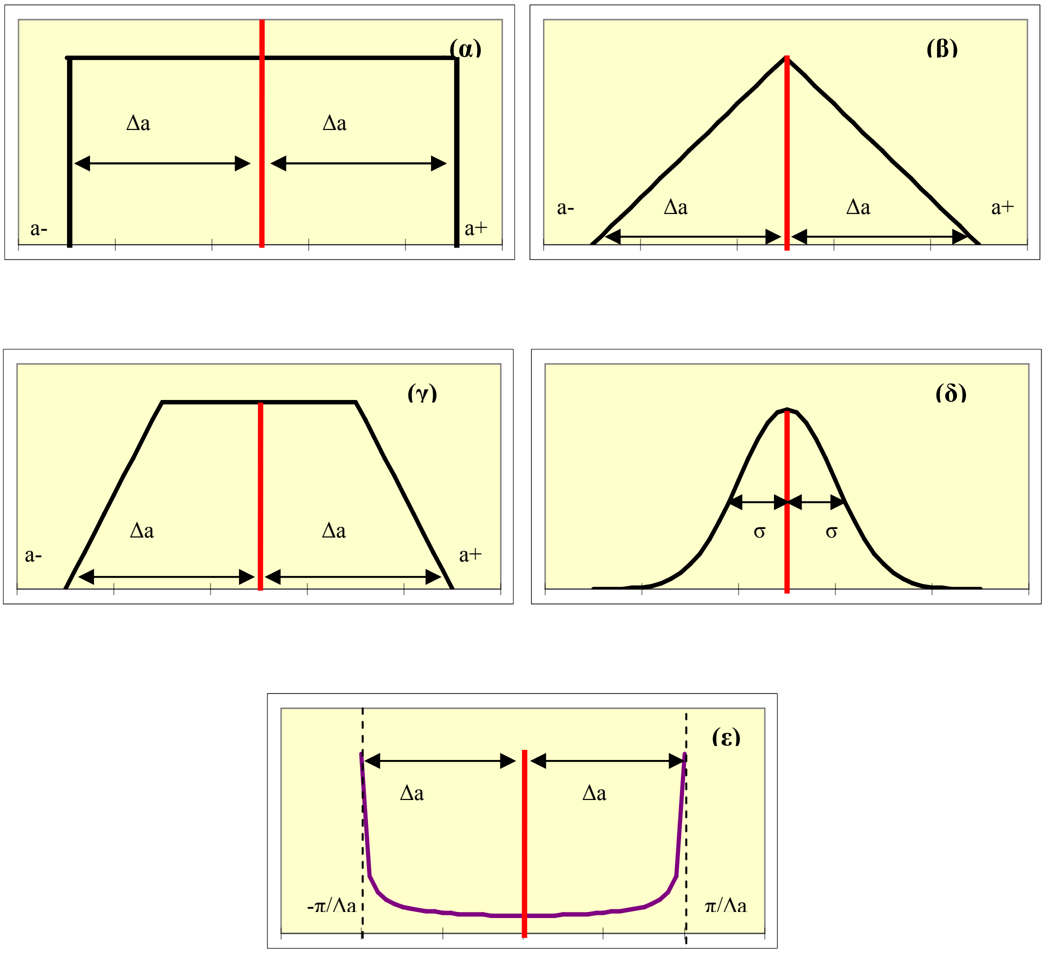
$E[X] = \frac{(a_+ + a_-)}{2}$ και $Var[X] = \frac{\Delta a^2}{3}$.

β) Τριγωνική κατανομή (Σχήμα 1.β) με ήμισυ πλάτος Δa, με την υπόθεση ότι $X = X_1 \pm X_2$ και X_1, X_2 ασυσχέτιστα μεγέθη που διέπονται από τετραγωνικές κατανομές με ίσα ημίσεια πλάτη Δa. Η αναμενόμενη τιμή και διακύμανση δίνονται αντίστοιχα ως: $E[X] = E[X_1] \pm E[X_2]$ και $Var[X\} = Var[X_1] + Var[X_2] = \frac{\Delta a^2}{6}$.

γ) Τραπεζοειδής κατανομή (Σχήμα 1.γ) με ήμισυ πλάτος $\Delta a = \Delta a_1 + \Delta a_2$, με την υπόθεση $X = X_1 \pm X_2$ και X_1, X_2 ασυσχέτιστα μεγέθη που διέπονται από τετραγωνικές κατανομές με διαφορετικά ημίσεια πλάτη Δa_1 και Δa_2. Η αναμενόμενη τιμή και διακύμανση δίνονται αντίστοιχα ως: $E[X] = E[X_1] \pm E[X_2]$ και $Var[X\} = Var[X_1] + Var[X_2] = \frac{\Delta a^2}{6}\left\{1 + \left(\frac{|\Delta a_1 - \Delta a_2|}{\Delta a_1 + \Delta a_2}\right)^2\right\}$.

δ) Κανονική κατανομή (Σχήμα 1.δ), με την υπόθεση ότι η καλύτερη εκτίμηση μ και η τυπική απόκλιση σ που μπορούν να αποδοθούν στο μέγεθος X είναι γνωστές. Η αναμενόμενη τιμή και διακύμανση δίνονται αντίστοιχα ως: $E[X] = \mu$ και $Var[X] = \sigma^2$.

ε) U- κατανομή (Σχήμα 1.ε) με ήμισυ πλάτος Δa, με την υπόθεση $X = \Delta a \cdot F(\varphi)$, $F(\varphi)$ περιοδική συνάρτηση και φ να διέπεται από την τετραγωνική κατανομή στο διάστημα (-π, +π). Η αναμενόμενη τιμή και διακύμανση δίνονται αντίστοιχα ως: $E[X] = 0$ και $Var[X] = \frac{\Delta a^2}{2}$.



Σχήμα 1. Συνήθης συναρτήσεις κατανομών (πυκνότητας) πιθανοτήτων

3. Συνδυασμένη Τυπική Αβεβαιότητα

Στην πλειονότητα των περιπτώσεων, ο προσδιορισμός ενός μεγέθους Y δεν επιτυγχάνεται με την άμεση μέτρησή του, αλλά έμμεσα από τον πειραματικό προσδιορισμό άλλων μεγεθών από τα οποία αυτό εξαρτάται. Επίσης, πολλές φορές υπάρχουν μεγέθη που επιδρούν σε ένα μετρητικό αποτέλεσμα χωρίς να είναι προφανής ο τρόπος και η σημαντικότητα της επίδρασής τους ώστε να απαιτείται τόσο η ταυτοποίησή τους όσο και ο προσδιορισμός της σημαντικότητάς τους μέσω ανάλυσης αιτίου- αιτιατού (cause-effect analysis). Τότε, η μετρητική διαδικασία καθώς και ο τρόπος υπολογισμού του μετρούμενου μεγέθους μπορεί να μοντελοποιηθεί από μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών που περιγράφει τον τρόπο συσχέτισης του μετρούμενου μεγέθους με τα μεγέθη από τα οποία εξαρτάται. Οι μεταβλητές αυτές μπορεί, μεταξύ άλλων, να περιγράφουν την επίδραση παραγόντων όπως τα μετρολογικά χαρακτηριστικά ενός οργάνου μέτρησης και της σταθερότητάς τους στον χρόνο, τις περιβαλλοντικές συνθήκες, και την δειγματοληψία

Συνήθως η μαθηματική συνάρτηση που περιγράφει το μετρητικό μοντέλο είναι μία αναλυτική έκφραση, μπορεί όμως να αποτελείται από μία ομάδα εκφράσεων που περιλαμβάνουν διορθωτικούς παράγοντες για την περιγραφή συστηματικών επιδράσεων. Η γενική έκφραση μπορεί να γραφεί ως

$$Y = f\,(X_1, \ldots, X_\iota, \ldots, X_N) \qquad (6.1)$$

όπου οι μεταβλητές του μοντέλου $X_1, \ldots, X_N$ είναι τα μετρούμενα μεγέθη από τα οποία εξαρτάται το Y.

Σύμφωνα με την βασική παραδοχή της μεθοδολογίας του “GUM” (παρ. 2.1), οι καλύτερες εκτιμήσεις των μεταβλητών του μοντέλου προκύπτουν από τις αναμενόμενες τιμές των αντίστοιχων κατανομών πιθανοτήτων, δηλ. $x_1 = E[X_1]$, $x_2 = E[X_2], \ldots, x_N = E[X_N]$, οι οποίες συνήθως αποκαλούνται οι μεταβλητές εισόδου του μοντέλου της μέτρησης. Η εξαγόμενη εκτίμηση y του μεγέθους Y υπολογίζεται από την μαθηματική συνάρτηση που περιγράφει την μετρητική διαδικασία όταν σε αυτή εισαχθούν ως μεταβλητές εισόδου τα $x_1, x_2, \ldots, x_N$ και γράφεται ως

$$y = f\,(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N) \qquad (6.2)$$

Αντίστοιχα, οι τυπικές αβεβαιότητες που αποδίδονται στις μεταβλητές εισόδου προκύπτουν από τις διακυμάνσεις των κατανομών πιθανοτήτων, δηλ. $u(x_1) = \sqrt{\mathrm{Var}[X_1]}$, $u(x_2) = \sqrt{\mathrm{Var}[X_2]}, \ldots, u(x_N) = \sqrt{\mathrm{Var}[X_N]}$.

Με χρήση του νόμου διάδοσης των αβεβαιοτήτων (Παράρτημα Γ) η συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα της εξαγόμενης εκτίμησης y του μεγέθους Y δίνεται από την σχέση

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial X_i}\frac{\partial f}{\partial X_j} u(x_i, x_j) \qquad (6.3)$$

όπου οι όροι ανώτερης τάξης παραλείπονται και οι μερικές παράγωγοι είναι υπολογισμένες για τις τιμές $X_i = x_i$, για $i = 1 \ldots N$ και αποκαλούνται συντελεστές ευαισθησίας, $u(x_i, x_j)$ είναι η συν-διακύμανση των μεταβλητών X_i και X_j και ορίζεται στην σχέση (Δ.14) του Παραρτήματος Δ. Αν δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών αυτών τότε οι συν-διακυμάνσεις είναι μηδενικές και ο νόμος διάδοσης των αβεβαιοτήτων γράφεται ως

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 \Big|_{X_i = x_i} u^2(x_i) \qquad (6.4)$$

Μία απλή εφαρμογή των παραπάνω στην περίπτωση που το μαθηματικό μοντέλο της μέτρησης είναι γραμμικό, δηλ., $f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_i \rho_i x_i$, δίνει αντίστοιχα για τις δύο περιπτώσεις ασυσχέτιστων και συσχετισμένων μεταβλητών τις γνωστές εκφράσεις συνδυασμένης τυπικής αβεβαιότητας:

- **Ασυσχέτιστες μεταβλητές**

$$u^2(y) = \sum_i [\rho_i u(x_i)]^2 = [\rho_1 u(x_1)]^2 + \ldots + [\rho_N u(x_N)]^2 \quad \text{και αν} \quad \rho_1 = \ldots.\rho_N = \pm 1$$

$$u^2(y) = (\pm 1)^2 [u^2(x_1) + \ldots.. + u^2(x_N)] \Rightarrow u\ (y) = [u^2(x_1) + \ldots.. + u^2(x_N)]^{1/2}$$

- **Συσχετισμένες μεταβλητές**

$$u^2(y) = \sum_i [\rho_i u(x_i)]^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \rho_i \rho_j u(x_i) u(x_j) =$$

$$= [\rho_1 u(x_1)]^2 + \ldots. + [\rho_N u(x_N)]^2 + 2\rho_1 u\ (x_1)[\rho_2 u(x_2) + \ldots + \rho_N u(x_N)] +$$

$$+ 2\rho_2 u\ (x_2)[\rho_3 u(x_3) + \ldots + \rho_N u(x_N)] + \ldots + 2\rho_{N\text{-}1} u(x_{N\text{-}1}) \rho_N u(x_N) =$$

$$= [\rho_1 u(x_1) + \ldots + \rho_N u(x_N)]^2 \Rightarrow u(y) = u(x_1) + \ldots + u(x_N)$$

με $\rho_1 = \ldots.\rho_N = \pm 1$

Τελειώνοντας, παρόλο που το “GUM” είναι αρκετά γενικό και επιχειρεί να αντιμετωπίσει την εκτίμηση της μετρητικής αβεβαιότητας για το σύνολο των μετρητικών διεργασιών, στηρίζεται σε ορισμένες παραδοχές οι οποίες θέτουν και τα όρια ισχύος του. Οι παραδοχές αυτές συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- Έχουν πραγματοποιηθεί όλες οι συστηματικές διορθώσεις στο μετρητικό αποτέλεσμα.
- Αφορά γραμμικά ή γραμμικές προσεγγίσεις μετρητικών μοντέλων.
- Τα μετρητικά μοντέλα περιέχουν σημαντικό αριθμό μεταβλητών εισόδου
- Οι κατανομές πιθανοτήτων που χαρακτηρίζουν τις μεταβλητές εισόδου είναι συμμετρικές.

3.1 Ισοζύγιο Αβεβαιοτήτων

Η οδηγία της European Accreditation EA-4/02 [6] προτείνει έναν εύχρηστο τρόπο παρουσίασης της διαδικασίας υπολογισμού της συνδυασμένης τυπικής αβεβαιότητας u(y) της εξαγόμενης εκτίμησης y του μεγέθους Y. Η μεθοδολογία συνίσταται στην κατάρτιση ενός ισοζυγίου αβεβαιοτήτων (uncertainty budget) με την μορφή πίνακα για μία μετρητική διαδικασία. Βασικός σκοπός του ισοζυγίου αβεβαιοτήτων είναι η εξαγωγή συμπερασμάτων από αυτό για την μέγιστη ευαισθησία της μετρητικής μεθόδου ως προς κάποιες μεταβλητές εισόδου και κατά συνέπεια η βελτίωση της αξιοπιστίας της. Ένα παράδειγμα ισοζυγίου αβεβαιοτήτων σύμφωνα με την παραπάνω οδηγία παρουσιάζεται στον πίνακα 1. Η ύπαρξη ενός ισοζυγίου αβεβαιοτήτων είναι απαραίτητη για εργαστήρια διακριβώσεων και δοκιμών τα οποία επιδιώκουν διαπίστευση βάσει του προτύπου EN ISO/IEC 17025 [7] με σκοπό την τεκμηρίωση της βέλτιστης μετρητικής τους ικανότητας για κάποιο συγκεκριμένο πεδίο εφαρμογής. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι η μορφή αυτή εξυπηρετεί ιδιαίτερα στην περίπτωση που οι υπολογισμοί θα γίνουν από κάποιο υπολογιστικό φύλλο (spreadsheet), όπως για παράδειγμα του EXCEL.

Οι στήλες του πίνακα αυτού περιέχουν τα παρακάτω δεδομένα:

1. ***Μέγεθος***: οι μεταβλητές των παραμέτρων που χρησιμοποιούνται στο μετρητικό μοντέλο.
2. ***Εκτίμηση***: οι αναμενόμενες τιμές των παραμέτρων του μοντέλου όπως προέκυψαν από την μετρητική διεργασία
3. ***Αβεβαιότητα***: οι αντίστοιχες αβεβαιότητες των εκτιμήσεων, οι οποίες μπορεί να είναι είτε Τύπου Α είτε Τύπου Β.
4. ***Κατανομή***: οι αντίστοιχες κατανομές πιθανοτήτων που περιγράφουν καλύτερα την αντίστοιχη παράμετρο του μοντέλου.
5. ***Τυπική Αβεβαιότητα***: οι αντίστοιχες τυπικές αβεβαιότητες που έχουν υπολογιστεί από τις δύο προηγούμενες στήλες του πίνακα.
6. ***Συντελεστής Ευαισθησίας***: οι παράγωγοι της μαθηματικής συνάρτησης του μετρητικού μοντέλου ως προς τις μεταβλητές του, υπολογισμένες για τις τιμές των εκτιμήσεων των μεταβλητών αυτών.
7. ***Συνεισφορά***: το γινόμενο των συντελεστών ευαισθησίας με τις αντίστοιχες τυπικές αβεβαιότητες.

Στην τελευταία γραμμή του πίνακα εμφανίζονται οι εκτιμώμενες τιμές του μεγέθους Y και της συνδυασμένης τυπικής αβεβαιότητας.

Πίνακας 1. Παράδειγμα κατάρτισης ισοζυγίου αβεβαιότητας

Μέγεθος X_i	***Εκτίμηση*** x_i	***Αβεβαιότητα*** u_i	***Κατ/νομή***	***Τυπική Αβεβαιότητα*** $u(x_i)$	***Συντ. Ευαισθησίας***	***Συνεισφορά*** $u_i(y)$
X_1	x_1	s_1	*Κανονική*	$s_1/\sqrt{n}$	c_1	$c_1 \bullet u(x_1)$
X_2	x_2	a_2	*Τετραγωνική*	$a_2/\sqrt{3}$	c_2	$c_2 \bullet u(x_2)$
•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•
X_N	x_N	a_3	*Τριγωνική*	$a_N/\sqrt{6}$	c_N	$c_N \bullet u(x_N)$
Y	***y***					$u(y)$

4. Διευρυμένη Αβεβαιότητα

Σε πολλές περιπτώσεις εμφανίζεται η ανάγκη της σύγκρισης του αποτελέσματος μιας μέτρησης με οριακές τιμές που καθορίζονται είτε από προδιαγραφές είτε από κανονιστικές απαιτήσεις και εν συνεχεία της απόφασης συμμόρφωσης ή μη με αυτές. Στην περίπτωση αυτή η εκτίμηση της αξιοπιστίας του μετρητικού αποτελέσματος εξαρτάται από το κατά πόσο αυτό βρίσκεται εντός των ορίων που έχουν τεθεί. Παρόλο που η φιλοσοφία του ISO "GUM" στηρίζεται στην χρήση της συνδυασμένης τυπικής αβεβαιότητας ως μία γενική παράμετρο χαρακτηρισμού της ποιότητας της μέτρησης, στην περίπτωση της τεκμηρίωσης της συμμόρφωσης η παράμετρος αυτή δεν είναι η πιο κατάλληλη δεδομένου ότι επιπλέον είναι απαραίτητος ο καθορισμός ενός εύρους στο οποίο θα εμπεριέχεται ένα μεγάλο ποσοστό (π.χ. 95%) των εξαγόμενων τιμών y, συμβατών με τις συνθήκες μέτρησης του μετρούμενου μεγέθους Y. Το εύρος αυτό είναι απαραίτητο ιδιαίτερα στην περίπτωση λήψης αποφάσεων που αφορούν την ασφάλεια, την υγεία και τις εμπορικές συναλλαγές.

Για τους παραπάνω λόγους στην μεθοδολογία του ISO "GUM" καθιερώθηκε η χρήση της αποκαλούμενης διευρυμένης αβεβαιότητας, U, η οποία δίνεται από το γινόμενο της συνδυασμένης τυπικής αβεβαιότητας u(y) με έναν ένα συντελεστή κάλυψης k,

$U=k\cdot u(y)$, έτσι ώστε να ορίζεται ένα διάστημα πιθανοτήτων [y-U, y+U] εκατέρωθεν της εξαγόμενης εκτίμησης y στο οποίο εμπεριέχεται το απαιτούμενο μεγάλο ποσοστό τιμών του μετρούμενου μεγέθους (Παράρτημα Β). Το διάστημα αυτό αντιστοιχεί σε μία πιθανότητα κάλυψης ή επίπεδο εμπιστοσύνης p. Για κάποιο επιζητούμενο επίπεδο εμπιστοσύνης p, ο συντελεστής κάλυψης k προκύπτει από την κατανομή t-student για συγκεκριμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας ν, δηλ. $k=t_p(\nu)$.

Ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας σε έναν απλό προσδιορισμό της τιμής ενός μετρούμενη μεγέθους σχετίζεται με τον αριθμό των μετρήσεων που έγιναν για τον προσδιορισμό αυτό. Στην περίπτωση μιας πολύπλοκης μέτρησης που κατ' επέκταση αντιπροσωπεύεται από ένα εξίσου πολύπλοκο μετρητικό μοντέλο, η συνεισφορά της κάθε μεταβλητής εισόδου του μοντέλου στον προσδιορισμό του συνολικού αριθμού βαθμών ελευθερίας γίνεται μέσω της σχέσης Welch-Satterhwaite [1] ως ακολούθως

$$\nu_{eff} = \frac{u^4(y)}{\sum_i \frac{c_i^4 u_i^4(y)}{\nu_i}}$$

όπου $c_i = \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{X_i = x_i}$ και ν_{eff} είναι οι αποκαλούμενοι δραστικοί βαθμοί ελευθερίας (effective degrees of freedom). ν_i είναι οι βαθμοί ελευθερίας της συνιστώσας $u_i(y)$ της συνδυασμένης τυπικής αβεβαιότητας u(y). Σημειώνεται ότι η παραπάνω αντιμετώπιση των βαθμών ελευθερίας μιας πολύπλοκης μέτρησης είναι απόρροια της ικανοποίησης των συνθηκών κάτω από τις οποίες ισχύει το Θεώρημα του Κεντρικού Ορίου [8]. Τέλος, πρέπει να αναφερθεί ότι σε περίπτωση που η κατανομή που διέπει το αποτέλεσμα της μέτρησης προσεγγίζει την κανονική κατανομή, δηλ. ικανοποιείται το Θεώρημα του Κεντρικού Ορίου, και το επιζητούμενο επίπεδο εμπιστοσύνης είναι περίπου 95%, τότε ο συντελεστής κάλυψης ισούται με 2, δηλ. k = 2.

5. Έκφραση του Αποτελέσματος της Μέτρησης

Η ορθή έκφραση του αποτελέσματος της μέτρησης είναι εξίσου σημαντική με την εκτίμηση του αποτελέσματος και της μετρητικής αβεβαιότητας που το συνοδεύει. Έτσι, το αποτέλεσμα της μέτρησης του μεγέθους Y εκφράζεται ως

$Y = \bar{y} \pm U$ σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% περίπου

που σημαίνει ότι η πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους έχει περίπου 95% πιθανότητα να βρίσκεται εντός του διαστήματος y-Uκαι y+U.

Σε πολλές περιπτώσεις υπάρχει αμφιβολία για την ορθή αριθμητική έκφραση του αποτελέσματος που αφορά στον αριθμό των ψηφίων που πρέπει να χρησιμοποιηθούν σε αυτή. Η έννοια των σημαντικών ψηφίων [9] παίζει κεντρικό ρόλο στην αντιμετώπιση του προβλήματος έκφρασης ενός αριθμητικού αποτελέσματος. Γενικά, ένα αριθμητικό ψηφίο στο αποτέλεσμα μιας πειραματικής μέτρησης θεωρείται σημαντικό όταν υπάρχει ένας αρκετά μεγάλος βαθμός εμπιστοσύνης σε αυτό. Σε αποτελέσματα που δεν είναι ακέραιοι, το αριστερότερο μη-μηδενικό ψηφίο θεωρείται το πλέον σημαντικό ενώ το τελευταίο ψηφίο το ελάχιστα σημαντικό. Είναι προφανές ότι ο βαθμός εμπιστοσύνης πηγάζει από την πειραματική διαδικασία που έχει ακολουθηθεί και ειδικότερα από το μέγεθος της μετρητικής αβεβαιότητας που συνοδεύει την μέτρηση.

Δεδομένου ότι η αβεβαιότητα συνήθως είναι ένα μικρό ποσοστό του αποτελέσματος, μπορεί να στρογγυλοποιηθεί* βάσει του κανόνα

Η αναφερόμενη τιμή της αβεβαιότητας μπορεί να εμπεριέχει ένα ή σε περιπτώσεις μετρήσεων μεγάλης ακρίβειας το πολύ δύο σημαντικά ψηφία.

Στον παραπάνω κανόνα υπάρχει μία σημαντική εξαίρεση όταν το πλέον σημαντικό ψηφίο είναι μονάδα. Τότε είναι σχεδόν υποχρεωτικό να χρησιμοποιηθεί και δεύτερο σημαντικό ψηφίο.

Η στρογγυλοποίηση του αποτελέσματος της μέτρησης γίνεται βάσει του κανόνα

Το τελευταίο σημαντικό ψηφίο συνήθως είναι της ίδιας τάξης μεγέθους, δηλ. εμφανίζεται στην ίδια δεκαδική θέση, με την αβεβαιότητα.

Σε ενδιάμεσα αποτελέσματα αποσκοπώντας στην μείωση των αποκλίσεων που προέρχονται από τις στρογγυλοποιήσεις και όταν αυτά πρόκειται να χρησιμοποιηθούν για την παραγωγή ενός τελικού αποτελέσματος ακολουθείται ο κανόνας

Σε περιπτώσεις ενδιάμεσων αποτελεσμάτων συνήθως κρατείται τουλάχιστο ένα επιπλέον σημαντικό ψηφίο από τον αριθμό ψηφίων που δικαιολογεί το τελικό αποτέλεσμα.

Ως μηδενικός κανόνας μπορεί να θεωρηθεί ότι το εκφραζόμενο τελικό αποτέλεσμα δεν είναι λογικό να περιέχει περισσότερα σημαντικά ψηφία από αυτά που δικαιολογούνται από την διακριτική ικανότητα του οργάνου μέτρησης.

Τέλος, στην περίπτωση τελικού αποτελέσματος που προκύπτει από αριθμητικές πράξεις μεταξύ αριθμών που αντιστοιχούν σε αποτελέσματα πειραματικών μετρήσεων, ο ενδεδειγμένος αριθμός ψηφίων είναι λογικό να εμπεριέχει το πολύ ένα αμφίβολο ψηφίο. Ανάλογα με την αριθμητική πράξη ακολουθούνται οι εξής κανόνες:

---

* Οι στρογγυλοποιήσεις ακολουθούν τις γνωστές συμβάσεις, δηλ. αν το ψηφίο όπου γίνεται η στρογγυλοποίηση είναι <5 τότε το προηγούμενο ψηφίο παραμένει αναλλοίωτο ενώ αντίθετα το προηγούμενο ψηφίο αυξάνεται κατά 1. Στην περίπτωση που το ψηφίο στρογγυλοποίησης είναι 5 τότε αν το προηγούμενο είναι άρτιο παραμένει ενώ αν είναι περιττό αυξάνεται κατά 1.

- αν δύο αριθμοί πρόκειται να αθροιστούν τότε το αποτέλεσμα θα έχει τόσα δεκαδικά ψηφία όσα τα ελάχιστα δεκαδικά ψηφία από τους δύο αριθμούς.
- αντίστοιχα στον πολλαπλασιασμό δύο αριθμών το αποτέλεσμα θα έχει τόσα σημαντικά ψηφία όσα τα ελάχιστα από τους δύο αριθμούς.

6. Βιβλιογραφία

1. ISO "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement", 2nd ed. Geneva, Switzerland, 1995.
2. ISO "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement", Supplement 1- "Numerical Methods for the Propagation of Distributions" 1st draft, 2004.
3. K. Weise and W. Woeger, "A Bayesian Theory of Measurement Uncertainty", Meas. Sci. Tech. 4, (1993), 1-11.
4. J.K. Taylor and H.V. Oppermann, "Handbook for the Quality Assurance of Metrological Measurements", NBS Handbook 145, Gaithersburg, 1986.
5. T. Leonard and J.S.J. Hsu "Bayesian Methods", Cambridge University Press, Cambridge 1999.
6. EA-4/02 "Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration", 2002.
7. EN ISO/IEC 17025 "General Requirements for the Competence of Testing and Calibration Laboratories", 1999.
8. J. Mandel, "The Statistical Analysis of Experimental Data", Dover Publications N.Y., 1984.
9. J.R. Taylor "An Introduction to Error Analysis", 2nd ed. University Science Books, 1997.

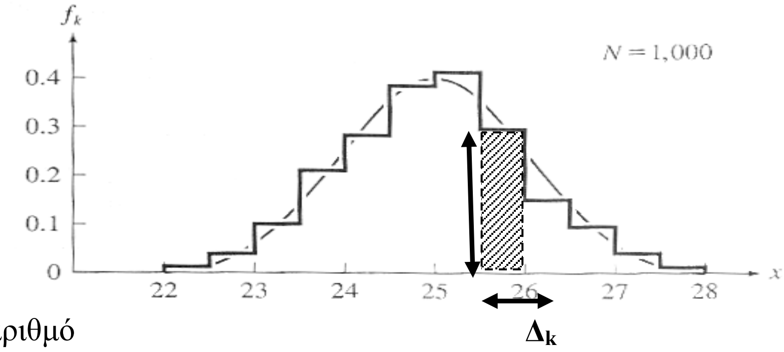
7. Πρόσθετη Σχετική Βιβλιογραφία

1. I. Lira, “Evaluating the Measurement Uncertainty” IOP Publishing Bristol, 2002.
2. UKAS “The Expression of Uncertainty and Confidence in Measurement”, Technical Report M3003, 1997.
3. B.N. Taylor and C.E. Kuyatt, “Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results”, Technical Report TN1297, 1994.
4. Γ. Ναβροζιδης et. al. «Η Αβεβαιότητα στις Μετρήσεις. Εκτίμηση-Υπολογισμός-Έκφραση» Ενημερωτικό Φυλλάδιο ΕΙΜ-01, 1999.
5. M. Grabe “Principles of Metrological Statistics”, Metrologia 23, (1987)213-219.
6. C.F. Dietrich “Uncertainty, Calibration and Probability, The Statistics of Scientific and Industrial Measurement”, 2nd ed. Adam Hilger Bristol 1991.
7. S.D. Phillips, K.R. Eberhardt and B. Parry, “Guidelines for Expressing the Uncertainty of Measurement Results containing Uncorrected Bias”, J. Res. Natl. Inst. Stand. Tech. 102, (1997)577.
8. S.D. Phillips, W.T. Estler, M.S. Levenson and K.R. Eberhardt “Calculation of Measurement Uncertainty Using Prior Information”, J. Res. Natl. Inst. Stand. Tech. 103, (1998)625.
9. Α. Παρασκευά, Ζ. Μεταξιώτου και Χ. Μήτσας, «Εφαρμογή Μεθοδολογίας Διασφάλισης των Μετρητικών Διεργασιών σε Εργαστήρια Διακριβώσεων», Τεχνικά Χρονικά, Σειρά V (Θέματα Χημικού Μηχ. και Μηχ. Μεταλλείων-Μεταλλουργών), 1-2/2004.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α - Η Κανονική Κατανομή

1. Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανοτήτων

Έστω ότι γίνονται N μετρήσεις x_1, x_2, …x_i, x_{i+1},…x_N για τον προσδιορισμό της τυχαίας μεταβλητής x. Το σύνολο αυτών των N μετρήσεων αποτελεί ένα δείγμα (sample) του πληθυσμού (population) όλων των πιθανών αποτελεσμάτων της μέτρησης της μεταβλητής αυτής. Διατάσσοντας τις τιμές σε αύξουσα σειρά, δηλ. $x_i < x_{i+1}$, και χωρίζοντας το διάστημα (x_1, x_N) σε υποδιαστήματα Δ_k, μπορούμε να αναζητήσουμε τον τρόπο με τον οποίο είναι κατανεμημένες οι μετρήσεις σε σχέση με τις πιθανές τιμές που λαμβάνει η μεταβλητή x, δηλ. τον αριθμό των μετρήσεων ανά υποδιάστημα προς τον



συνολικό αριθμό

Σχήμα Α1. Ιστόγραμμα για μεγάλο αριθμό μετρήσεων N. Οι διαστάσεις του γραμμοσκιασμένου παραλληλογράμμου αντιστοιχούν στο υποδιάστημα Δ_k και στο κλάσμα των μετρήσεων f_k εντός αυτού.

των μετρήσεων της μεταβλητής που πραγματοποιήθηκαν. Αν n_k είναι οι μετρήσεις εντός του υποδιαστήματος Δ_k τότε ο ζητούμενc $\mathbf{f_k}$ θμός δίνεται ως $f_k = \frac{n_k}{\Delta_k N}$. Η κατανομή των μετρήσεων μπορεί να αναπαρασταθεί σε γραφική παράσταση με την μορφή ενός ιστογράμματος όπου στον άξονα των τετμημένων αναγράφονται οι μετρήσεις x_i και στον άξονα των τεταγμένων το κλάσμα των μετρήσεων εντός του υποδιαστήματος Δ_k, όπως φαίνεται στο σχήμα Α1. Το εμβαδό του $k^{ου}$ παραλληλογράμμου του ιστογράμματος δίνεται ως $f_k \bullet \Delta_k$, δηλ. αντιπροσωπεύει το κλάσμα των μετρήσεων εντός του $k^{ου}$ υποδιαστήματος.

Όταν ο αριθμός των μετρήσεων γίνει πολύ μεγάλος, τότε τα υποδιαστήματα Δk θα γίνουν πολύ μικρά και το ιστόγραμμα θα αρχίσει να προσομοιώνει μία συνεχή καμπύλη, όπως φαίνεται στο σχήμα Α1. Σε αυτήν την περίπτωση, δηλ. όταν ο αριθμός των μετρήσεων τείνει στο άπειρο, τότε μιλάμε για την κατανομή του πληθυσμού των μετρήσεων. Μαθηματικά, μία τυχαία συνεχής μεταβλητή x, εκφράζεται από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτήτων (probability density function) f(x). Το γινόμενό της με ένα μικρό διάστημα dx, f(x)dx, δίνει το κλάσμα των μετρήσεων που αναμένονται στο διάστημα μεταξύ x και x + dx, σε αντιστοιχία με την περίπτωση του πεπερασμένου αριθμού διακριτών τιμών που εξετάσθηκε αρχικά. Αντίστοιχα, μπορούμε να πούμε ότι f(x)dx είναι η πιθανότητα το αποτέλεσμα της μέτρησης να βρίσκεται μεταξύ x και x + dx. Βάσει αυτής της λογικής, η πιθανότητα το αποτέλεσμα της μέτρησης του x να βρίσκεται μεταξύ των τιμών x = a και x = b θα δίνεται από την σχέση

$$\int_a^b f(x)dx \qquad \text{(A1)}$$

όπου η συνθήκη κανονικοποίησης είναι $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Τα παραπάνω απεικονίζονται στο σχήμα Α2.

Σχήμα Α2. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτήτων. (α) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου αντιστοιχεί στην πιθανότητα το αποτέλεσμα της μέτρησης να βρίσκεται μεταξύ x και x + dx. (β) Το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής αντιστοιχεί στην πιθανότητα το αποτέλεσμα της μέτρησης του x να βρίσκεται μεταξύ των τιμών x = a και x = b

Η μέση τιμή της μεταβλητής x ή η αναμενόμενη τιμή της, E(x), για αριθμό μετρήσεων που τείνουν στο άπειρο δίνεται από την σχέση

$$E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \qquad \text{(A2)}$$

και η διακύμανσή της Var(x) δίνεται αντίστοιχα από την

$$Var(x) = E[(x-\mu)]^2 = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \qquad \text{(A3)}$$

Εξίσου σημαντική είναι και η συγκεντρωτική συνάρτηση κατανομής (cumulative distribution function) που δίνει την πιθανότητα η τιμή της μεταβλητής x να είναι μικρότερη από μία συγκεκριμένη μέτρηση x = b, και δίνεται από την σχέση

$$F(b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx \qquad \text{(A4)}$$

2. Η Κανονική Κατανομή

Έχει βρεθεί ότι πολλά αποτελέσματα μετρήσεων που υπόκεινται σε τυχαίες πηγές σφαλμάτων αντιπροσωπεύονται από μία συμμετρική κωδωνοειδή κατανομή και λέγεται ότι οι μετρήσεις είναι κανονικά κατανεμημένες. Σε αυτή την περίπτωση η τυχαία μεταβλητή x η οποία αντιστοιχίζεται στο μετρούμενο μέγεθος διέπεται από την κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτήτων η οποία δίνεται από την δι-παραμετρική σχέση

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\,(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad \text{(A5)}$$

όπου μ είναι η αναμενόμενη τιμή της μεταβλητής x και σ η τυπική απόκλισή της.

Συνήθως οι παράμετροι μ και σ είναι άγνωστες και προκύπτει το πρόβλημα του προσδιορισμού των καλύτερων εκτιμήσεών τους από ένα δείγμα n παρατηρήσεων x_1, x_2, …, x_n. Ο προσδιορισμός αυτός είναι εφικτός βάσει της αρχής του πιθανότερου ενδεχομένου (principle of maximum likelihood) το οποίο αναφέρει ότι: από n παρατηρήσεις x_1, x_2, …, x_n ενός κανονικά κατανεμημένου μεγέθους x, οι καλύτερες εκτιμήσεις της μέσης τιμής μ και της τυπικής απόκλισης σ είναι αυτές για τις οποίες οι παρατηρούμενες τιμές είναι οι πλέον πιθανές, δηλ. με άλλα λόγια η πιθανότητα

$$\Pr ob_{X,\sigma}(x_1,....,x_n) \propto \frac{1}{\sigma^n} e^{\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \text{Maximum}$$

Αποτέλεσμα μεγιστοποίησης της πιθανότητας ή εναλλακτικά ελαχιστοποίησης του εκθέτη είναι ότι η εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής μ είναι ο μέσος όρος του δείγματος

$$\overline{x} = \frac{\sum_i x_i}{n} \qquad \text{(A6)}$$

και η καλύτερη εκτίμηση της τυπικής απόκλισης σ είναι η τυπική απόκλιση του δείγματος

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \qquad \text{(A7)}$$

Οι αβεβαιότητες των εκτιμήσεων αυτών είναι αντίστοιχα

$$s_m = \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \text{(A8)}$$

$$s_s = \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} \qquad \text{(A9)}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β - Διαστήματα Εμπιστοσύνης και Κατανομή t-Student

1. Διαστήματα Πιθανότητας και Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Βασικό πρόβλημα της θεωρίας σφαλμάτων είναι ο προσδιορισμός της συχνότητας εμφάνισης σφαλμάτων δεδομένου μεγέθους. Έστω ότι το αποτέλεσμα της μέτρησης μιας μεταβλητής x, εκφράζεται ως $x = \mu + \varepsilon$ όπου ε είναι μία τυχαία μεταβλητή, κανονικά κατανεμημένη με πιθανότερη τιμή ίση με μηδέν και διακύμανση σ^2. Αν περιοριστούμε στην περίπτωση αμελητέων συστηματικών σφαλμάτων η συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτήτων της x θα δίνεται από την σχέση

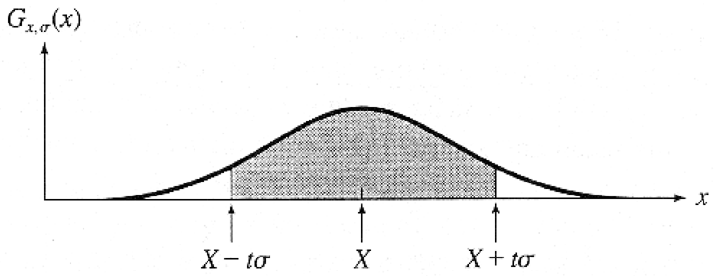
$$f_{\mu,\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\,(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad \text{(B1)}$$

όπου μ είναι η μέση τιμή και σ είναι η τυπική απόκλιση.

Το ερώτημα που συχνά διατυπώνεται είναι: δεδομένου ενός αριθμού τυπικών αποκλίσεων tσ, ποια η συχνότητα εμφάνισης σφαλμάτων $\varepsilon = \mu - x$ μεγαλύτερων του tσ, δηλ., ποια η πιθανότητα να ισχύει $|x - \mu| < t\sigma$ ή αντίστοιχα $\mu - t\sigma < x < \mu + t\sigma$. Το διάστημα αυτό αποκαλείται διάστημα πιθανότητας (probability interval), ενώ η πιθανότητα που αντιστοιχεί σε αυτό υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα της συνάρτησης κατανομής των αποτελεσμάτων των μετρήσεων ως

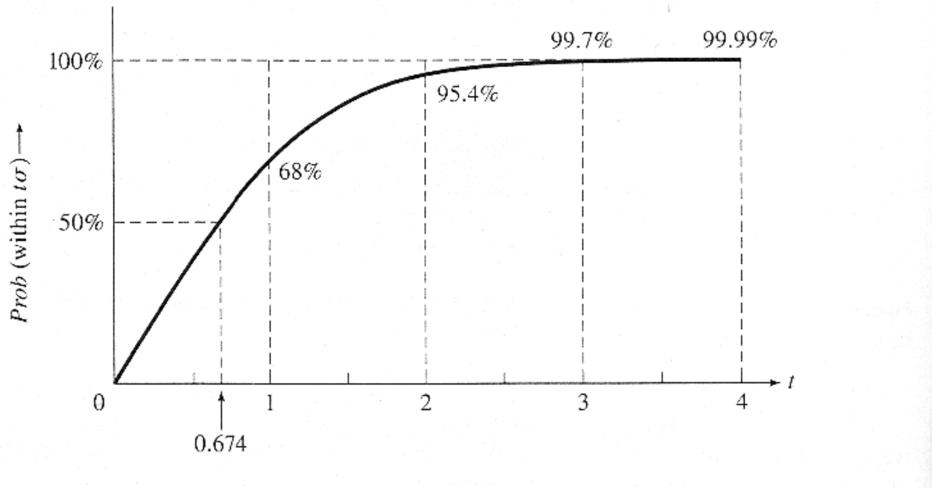
$$\text{Prob(εντός } t\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} e^{-z^2/2} dz \qquad \text{(B2)}$$

όπου $z = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$. Η τιμή του ολοκληρώματος είναι το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας του σχήματος Β1.



Σχήμα Β1. Το διάστημα πιθανότητας $|x - X| < t\sigma$.

Η τιμή του ολοκληρώματος συναρτήσει του αριθμού των τυπικών αποκλίσεων t φαίνεται στο σχήμα Β2.



Σχήμα Β2. Η πιθανότητα που αντιστοιχεί σε διαστήματα πιθανότητας $|x - X| < t\varsigma$ για διάφορες τιμές t.

Στην παραπάνω θεώρηση τόσο η μέση τιμή μ όσο και η τυπική απόκλιση σ ήταν γνωστές, κάτι που συνήθως δεν ισχύει αφού ο σκοπός της μέτρησης είναι ακριβώς η εκτίμηση αυτών των ποσοτήτων. Έστω λοιπόν ότι πραγματοποιείται μία μέτρηση της μεταβλητής x για τον προσδιορισμό της τιμής μ και ότι η μετρητική διεργασία είναι πολύ καλά χαρακτηρισμένη ώστε η τυπική απόκλιση σ να είναι γνωστή. Σε αυτή την περίπτωση ενδιαφέρον θα είχε να μπορούσε να εκτιμηθεί η πιθανότητα το μ να εμφανιστεί στο διάστημα που καθορίζεται ως $x - t\sigma < \mu < x + t\sigma$. Πρέπει να σημειωθεί ότι το ερώτημα αυτό έχει μία λεπτή αλλά σημαντική διαφορά σε σχέση με το πρώτο ερώτημα που είχε τεθεί. Συγκεκριμένα, ενώ αρχικά το ερώτημα αφορούσε την θέση μιας τυχαίας μεταβλητής x ανάμεσα σε δύο σταθερά όρια, $\mu \pm t\sigma$, τώρα το ενδιαφέρον εστιάζεται στην θέση μίας σταθερής ποσότητας μ ανάμεσα σε δύο όρια που αντιπροσωπεύονται από δύο τυχαίες μεταβλητές, $x \pm t\sigma$. Δεδομένου ότι το μ δεν υπόκειται σε τυχαίες διακυμάνσεις, αν και άγνωστο, η σχέση $x - t\sigma < \mu < x + t\sigma$ πρέπει να ερμηνευθεί ως η πιθανότητα ενός τυχαίου διαστήματος με όρια $x \pm t\sigma$ να περικλείει την τιμή μ. Σε αυτή την περίπτωση αναφερόμαστε σε ένα διάστημα εμπιστοσύνης (confidence interval) για την άγνωστη ποσότητα μ βάσει της μετρήσεως του x, ενώ η πιθανότητα που το συνοδεύει υπολογίζεται πάλι από το ολοκλήρωμα της σχέσης (Β2).

2. Κατανομή t-Student

Σε περιπτώσεις όπου τόσο η μέση τιμή μ όσο και η τυπική απόκλιση σ είναι άγνωστες ο προσδιορισμός του διαστήματος εμπιστοσύνης γίνεται πιο περίπλοκος. Καταρχήν πρέπει να εκτιμηθεί η τυπική απόκλιση από ένα δείγμα N μετρήσεων και στην συνέχεια να προσδιορισθεί το διάστημα εμπιστοσύνης που περικλείει την τιμή μ με πληροφορίες που προέρχονται από το δείγμα. Τώρα το ερώτημα αφορά την πιθανότητα το μ να εμφανιστεί στο διάστημα που καθορίζεται ως $\bar{x} - \frac{t's}{\sqrt{N}} < X < \bar{x} + \frac{t's}{\sqrt{N}}$, όπου $\bar{x}$ και s ο μέσος όρος και η τυπική απόκλιση του δείγματος. Σημειώνεται μία σημαντική διαφοροποίηση σε σχέση με την περίπτωση της γνωστής τυπικής απόκλισης σ, ότι δηλ., το διάστημα αυτό δεν είναι πλέον σταθερό μεταξύ διαφορετικών δειγμάτων αφού το s εξαρτάται από τον αριθμό των επαναλήψεων N. Για τον λόγο αυτό η σταθερά t έχει αντικατασταθεί με την t΄ ώστε η πιθανότητα εμφάνισης του μ στο νέο διάστημα να είναι ίδια με αυτή εμφάνισης στο x - tσ < μ < x + tσ. Η παραπάνω σχέση μπορεί ισοδύναμα να γραφεί $\left|\frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{N}}\right| < t'$ ορίζοντας μία νέα συνάρτηση πιθανοτήτων, δηλ., του λόγου των παρατηρούμενων αποκλίσεων προς την εκτιμώμενη τυπική απόκλιση του μέσου. Η κατανομή αυτή ονομάζεται t-Student και σε αντίθεση με την Κανονική κατανομή η μορφή της εξαρτάται από τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας, N-1, της εκτίμησης s.

Η έννοια της κατανομής t-Student μπορεί να γενικευθεί ακόμη περισσότερο. Έστω ότι q είναι μία τυχαία μεταβλητή, με πιθανότερη τιμή E(q) και τυπικό σφάλμα (τυπική απόκλιση μέσου) σ_{mq}, με αμελητέα συστηματικά σφάλματα. Η μεταβλητή q μπορεί να αντιπροσωπεύει μία μόνο μέτρηση, τον μέσο αριθμό επαναλήψεων N μετρήσεων ή την εκτίμηση ενός σύνθετου μεγέθους που προκύπτει από τον συνδυασμό πολλών άλλων μεγεθών που μετρούνται. Τότε εάν το q ακολουθεί μία Κανονική κατανομή, ο λόγος $\frac{q - E(q)}{\sigma_{mq}}$ ακολουθεί την κατανομή t-Student με ν βαθμούς ελευθερίας και ορίζει ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την άγνωστη τιμή E(q) ως

$$q - \frac{t_{\%,v}}{\sigma_{mq}} < E(q) < q + \frac{t_{\%,v}}{\sigma_{mq}}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ - Νόμος Διάδοσης Αβεβαιοτήτων

Σε πολλές περιπτώσεις η μέτρηση ενός μεγέθους Q δεν είναι άμεσα εφικτή αλλά εξαρτάται από την μέτρηση n άλλων μεγεθών $X_1,X_2, \ldots,X_n$, δηλ. ισχύει η μαθηματική σχέση

$$Q = Q(X_1,X_2 \ldots X_n) \qquad (\Gamma1)$$

Έστω ότι $x_1,x_2,\ldots,x_n$ είναι οι εκτιμήσεις των μεγεθών $X_1,X_2 \ldots X_n$ αντίστοιχα, που προκύπτουν από την μέτρησή τους. Συνέπεια της μέτρησης είναι οι εκτιμήσεις αυτές να εμπεριέχουν τυχαία σφάλματα και τα οποία είναι λογικό να υποτεθεί ότι θα διαδοθούν με κάποιο τρόπο στην εκτίμηση q, του μεγέθους Q. Συνήθως, δεν είναι εφικτή μια ποσοτική εκτίμηση των σφαλμάτων αφού οι πραγματικές τιμές των μεγεθών $X_1,X_2 \ldots X_n$ δεν είναι γνωστές. Επομένως είναι προτιμότερο να αναλογισθεί κανείς πως διαδίδεται κάποιο χαρακτηριστικό της αβεβαιότητας που συνοδεύει τις εκτιμήσεις όπως για παράδειγμα οι τυπικές αποκλίσεις των κατανομών πιθανοτήτων των μεταβλητών $X_1,X_2, \ldots,X_n$, και το αρχικό ερώτημα να αναχθεί σε αυτό της διάδοσης των αβεβαιοτήτων $u(x_1),u(x_2)\ldots u(x_n)$ των εκτιμήσεων των μεγεθών $X_1,X_2 \ldots X_n$ στον προσδιορισμό του μεγέθους Q;

Ξεκινώντας από το γεγονός ότι τα $x_1,x_2,\ldots,x_n$ είναι «λογικές» εκτιμήσεις των μεγεθών $X_1,X_2, \ldots,X_n$, τότε το Q μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης γύρω από τις εκτιμήσεις ως

$$Q(X_1,\ldots,X_n) \approx Q(x_1,\ldots,x_n) + \frac{\partial Q}{\partial X_1}(X_1 - x_1) + \ldots + \frac{\partial Q}{\partial X_n}(X_n - x_n) \qquad (\Gamma2)$$

όπου οι παράγωγοι είναι υπολογισμένες στα $X_i = x_i$ ($i = 1\ldots n$). Εφόσον τα $X_1,X_2 \ldots X_n$ είναι τυχαίες μεταβλητές έπεται ότι και το Q είναι τυχαία μεταβλητή με πιθανότερη τιμή $E\{Q\} = Q(x_1,\ldots x_n)$. Επομένως

$$(Q(X_1,\ldots,X_n) - Q(x_1,\ldots,x_n))^2 = (Q - E(Q))^2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial X_1}(X_1 - x_1) + \ldots + \frac{\partial Q}{\partial X_n}(X_n - x_n)\right)^2 \qquad (\Gamma3)$$

Έχοντας υπόψη ότι για μία τυχαία μεταβλητή z, η πιθανότερη τιμή E(z) και η διακύμανση Var(z) ορίζονται αντίστοιχα ως

$$E(z) = \int_{\infty}^{\infty} zf(z)dz \qquad (\Gamma4)$$

$$\mathrm{Var}(z) = E\{(z - E(z))^2\} = \int_{\infty}^{\infty} (z-E(z))^2 f(z)dz = E(z^2) - E^2(z) \qquad (\Gamma5)$$

όπου f(z) είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτήτων (pdf) που αντιστοιχεί στην μεταβλητή, προκύπτει ότι

$$E(Q-E(Q))^2 = (\frac{\partial Q}{\partial X_1})^2 E(X_1 - x_1)^2 + ... + (\frac{\partial Q}{\partial X_n})^2 E(X_n - x_n)^2 + \sum_{i,j}^{n} \frac{\partial Q}{\partial X_i}\frac{\partial Q}{\partial X_j} E(X_i - x_i)E(X_j - x_j)$$

ή αντικαθιστώντας για τις πιθανότερες τιμές των τετραγωνικών αποκλίσεων

$$Var(Q) = (\frac{\partial Q}{\partial X_1})^2 Var(X_1) + ... + (\frac{\partial Q}{\partial X_n})^2 Var(X_2) + \sum_{i,j}^{n} \frac{\partial Q}{\partial X_i}\frac{\partial Q}{\partial X_j} Cov(X_i, X_j) \tag{Γ6}$$

που είναι ο νόμος διάδοσης των αβεβαιοτήτων. Αν για τις διακυμάνσεις και συν-διακυμάνσεις χρησιμοποιηθούν οι αντίστοιχες αβεβαιότητες που συνοδεύουν τις πειραματικά προσδιορισμένες εκτιμήσεις η παραπάνω σχέση γράφεται

$$u^2(q) = (\frac{\partial Q}{\partial X_1})^2 u^2(x_1) + ... + (\frac{\partial Q}{\partial X_n})^2 u^2(x_n) + \sum_{i,j}^{n} \frac{\partial Q}{\partial X_i}\frac{\partial Q}{\partial X_j} u(x_i, x_j) \tag{Γ7}$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ - Γραμμική Παλινδρόμηση

1. Το Πρόβλημα

Δεδομένων n ζευγών μετρήσεων (x_1, y_1), …(x_n, y_n) ζητείται: α) να προσδιορισθούν οι παράμετροι της βέλτιστης ευθείας $y = A_o + A_1 \cdot x$ που προσαρμόζεται στα ζεύγη των πειραματικών μετρήσεων και β) να εκτιμηθεί κατά πόσο η αρχική υπόθεση της γραμμικής εξάρτησης του y από το x είναι αληθής, δηλ. με άλλα λόγια πόσο καλή είναι η επιτευχθείσα προσαρμογή. Ανάλογα με το είδος των μετρήσεων, αρχικά, μπορούν να γίνουν κάποιες παραδοχές οι οποίες θα απλοποιήσουν την αντιμετώπιση του προβλήματος:

Α) οι αβεβαιότητες των μετρήσεων του y είναι τόσο μεγάλες σε σχέση με αυτές των μετρήσεων του x που οι δεύτερες μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες.

Β) οι αβεβαιότητες των μετρήσεων του y είναι περίπου ίσες

Γ) κάθε μέτρηση y_i αποτελεί εκτίμηση μιας τυχαίας μεταβλητής που διέπεται από μία Κανονική κατανομή με παράμετρο εύρους σ_y.

2. Προσδιορισμός της Βέλτιστης Ευθείας με Χρήση των Ελαχίστων Τετραγώνων

Στην περίπτωση που οι παράμετροι της ευθείας ήταν γνωστές, τότε για οποιοδήποτε x_i θα μπορούσε να υπολογιστεί η πραγματική τιμή $A_o + A_1 \cdot x_i$ που αντιστοιχεί στην μέτρηση y_i. Επειδή η μέτρηση του y_i υπόκειται σε μία Κανονική κατανομή με κέντρο την πραγματική τιμή, η πιθανότητα παρατήρησης της συγκεκριμένης μέτρησης δίνεται από

$$\mathrm{Prob}_{A_o,A_1}(y_i) \propto \frac{1}{\sigma_y} e^{-\left(y_i - A_o - A_1 x_i\right)^2 / 2\sigma_y^2} \qquad (\Delta.1)$$

Αντίστοιχα η πιθανότητα παρατήρησης όλων των συγκεκριμένων μετρήσεων $y_1, \ldots y_n$ θα δίνεται από το γινόμενο των επιμέρους πιθανοτήτων και θα είναι

$$\mathrm{Prob}_{A_o,A_1}(y_i, \ldots y_n) \propto \frac{1}{\sigma_y^n} e^{-\chi^2/2} \qquad (\Delta.2)$$

όπου $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(y_i - A_o - A_1 x_i\right)^2}{\sigma_y^2}$

Οι καλύτερες εκτιμήσεις των παραμέτρων της ευθείας βάσει των μετρήσεων είναι αυτές για τις οποίες η πιθανότητα $Prob_{Ao,A1}(y_1,\ldots y_n)$ είναι μέγιστη ή το άθροισμα των τετραγώνων χ^2 είναι ελάχιστο. Παίρνοντας τις παραγώγους του χ^2 ως προς τις παραμέτρους A_o και A_1 και εξισώνοντας με μηδέν, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους

$$A_o n + A_1 \sum_i x_i = \sum_i y_i \quad (\Delta.3\text{-}1)$$

$$A_o \sum_i x_i + A_1 \sum_i x_i^2 = \sum_i x_i y_i \quad (\Delta.3\text{-}2)$$

η επίλυση του οποίου δίνει τις ζητούμενες παραμέτρους ως

$$A_o = \frac{\sum_i x^2 \sum_i y - \sum_i x \sum_i y}{\Delta} \quad (\Delta.4\text{-}1)$$

$$A_1 = \frac{N \sum_i xy - \sum_i x \sum_i y}{\Delta} \quad (\Delta.4\text{-}2)$$

με $\Delta = n\sum_\iota x^2 - \left(\sum_i x\right)^2$

Αν και θεωρήθηκε αρχικά ότι οι μετρήσεις y_i έχουν αβεβαιότητα, οι τιμές της συνήθως αρχικά δεν είναι γνωστές αφού οι μετρήσεις δεν είναι επαναληπτικές παρατηρήσεις της ίδιας ποσότητας. Η εκτίμηση της αβεβαιότητας σε αυτή την περίπτωση μπορεί να γίνει βάσει των αποκλίσεων y_i - A_o -$A_1 \cdot xi$ οι οποίες ακολουθούν Κανονική κατανομή με κεντρική τιμή μηδέν και παράμετρο εύρους σ_y (αφού υποτέθηκε ότι κάθε y_i είναι κατανεμημένο κανονικά γύρω από την πραγματική τιμή A_o +$A_1 \cdot x_i$). Βάσει των παραπάνω η αβεβαιότητα των μετρήσεων μπορεί να εκτιμηθεί από την παράμετρο εύρους της κατανομής η οποία δίνεται από την σχέση

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{v}\sum_i \left(y_i - A_o - A_1 x_i\right)^2} \quad (\Delta.5)$$

όπου ν = n-2 και είναι ο αριθμός βαθμών ελευθερίας. Δεδομένου ότι οι παράμετροι A_o και A_1 είναι συναρτήσεις των μετρήσεων y_i, οι αβεβαιότητές τους υπολογίζονται με χρήση της έκφρασης της διάδοσης αβεβαιοτήτων ως

$$\sigma_{A_o} = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_i x^2}{\Delta}} \quad \text{και} \quad \sigma_{A_1} = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{\Delta}} \quad (\Delta.6)$$

3. Σταθμισμένα Ελάχιστα Τετράγωνα

Παραπάνω εκτιμήθηκε η βέλτιστη ευθεία που περιγράφει την σχέση μεταξύ των μετρήσεων x_i και y_i κάτω από την παραδοχή ότι οι αβεβαιότητες των μετρήσεων του y είναι περίπου ίσες. Στην περίπτωση που δεν ισχύει αυτό τότε ο προσδιορισμός της βέλτιστης ευθείας πρέπει να γίνει με την μέθοδο των σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων (weighted least squares). Για την εφαρμογή αυτής της μεθόδου πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι τώρα η κάθε μία μέτρηση y_i υπόκεινται σε διαφορετική Κανονική κατανομή με γνωστή παράμετρο εύρους σ_i, οπότε η πιθανότητα παρατήρησης της συγκεκριμένης μέτρησης δίνεται από

$$\mathrm{Prob}_{A_o,A_1}(y_i) \propto \frac{1}{\sigma_i} e^{-\left(y_i - A_o - A_1 x_i\right)^2 / 2\sigma_i^2} \qquad (\Delta.7)$$

ενώ η πιθανότητα παρατήρησης όλων των συγκεκριμένων μετρήσεων $y_1, \ldots y_n$ θα δίνεται από το γινόμενο των επιμέρους πιθανοτήτων και θα είναι

$$\mathrm{Prob}_{A_o,A_1}(y_i, \ldots y_n) \propto \frac{1}{\prod_i \sigma_i} e^{-\chi^2/2} \qquad (\Delta.8)$$

όπου $\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i \left(y_i - A_o - A_1 x_i\right)^2$ και $w_i = 1/\sigma_i^2$ είναι οι παράγοντες στάθμισης. Εφαρμόζοντας την ίδια μεθοδολογία όπως στα μη-σταθμισμένα ελάχιστα τετράγωνα, από την επίλυση του συστήματος προκύπτουν οι παράμετροι της βέλτιστης ευθείας ως

$$A_o = \frac{\sum_i wx^2 \sum_i wy - \sum_i wx \sum_i wy}{\Delta} \qquad (\Delta.9\text{-}1)$$

$$A_1 = \frac{\sum_i w \sum_i wxy - \sum_i wx \sum_i wy}{\Delta} \qquad (\Delta.9\text{-}2)$$

όπου $\Delta = \sum_i w \sum_i w x^2 - \left(\sum_i wx\right)$

και με αβεβαιότητες

$$\sigma_{A_o} = \sqrt{\frac{\sum_i w x^2}{\Delta}} \quad \text{και} \quad \sigma_{A_1} = \sqrt{\frac{\sum_i w}{\Delta}} \qquad (\Delta.10)$$

4. Αβεβαιότητα και στις δύο Μεταβλητές

Αρχικά μπορεί να αναρωτηθεί κανείς πως αντιμετωπίζεται η περίπτωση ύπαρξης αβεβαιότητας στις τιμές x_i αλλά χωρίς αβεβαιότητα στις τιμές y_i. Εξετάζοντας το σχήμα Δ1 εύκολα προκύπτει ότι ένα σφάλμα Δx στην τιμή του x είναι ισοδύναμο με ένα σφάλμα Δy στην τιμή του y που ισούται με

$$\Delta y(_{\text{ισοδύναμο}}) = \frac{dy}{dx}\Delta x \text{ ή αντίστοιχα } \sigma_y(_{\text{ισοδύναμο}}) = \frac{dy}{dx}\sigma_x$$

Στην περίπτωση της ευθείας το dy/dx είναι η κλίση της ευθείας A_1 οπότε η παραπάνω γράφεται

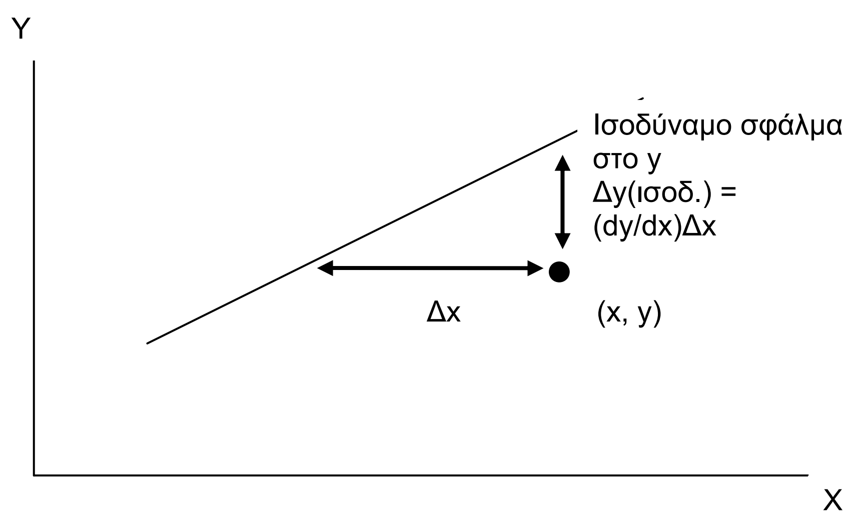
$$\sigma_y(_{\text{ισοδύναμο}}) = A_1\sigma_x \qquad (\Delta.11)$$

Επομένως το πρόβλημα ανάγεται πάλι στην περίπτωση προσαρμογής της ευθείας σε ζεύγη σημείων τα x των οποίων δεν έχουν αβεβαιότητα και τα y έχουν μία ισοδύναμη αβεβαιότητα σ_y(ισοδύναμο).

Τώρα στην γενικότερη περίπτωση ύπαρξης αβεβαιότητας και στις δύο μεταβλητές και λόγω της ανεξαρτησίας των μετρήσεων x_i και y_i η συνολική αβεβαιότητα θα προκύψει ως

$$\sigma_y(_{\text{ισοδύναμο}}) = \sqrt{\sigma_y^2 + \left(A_1\sigma_x\right)^2} \qquad (\Delta.12)$$

όπου σ_x και σ_y οι αβεβαιότητές τους αντίστοιχα. Αν οι αβεβαιότητες των μετρήσεων του x και y δεν είναι ίσες τότε και οι αντίστοιχες ισοδύναμες αβεβαιότητες θα διαφέρουν οπότε σε αυτή την περίπτωση πρέπει να χρησιμοποιηθεί η μεθοδολογία των σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει η εξής επιπλοκή: ο υπολογισμός των σ_i(ισοδύναμο) προϋποθέτει την γνώση της κλίσης A_1 της ευθείας η οποία είναι άγνωστη μέχρι να λυθεί το πρόβλημα. Για να ξεπερασθεί αυτή η δυσκολία γίνεται αρχικά ο υπολογισμός της κλίσης προσεγγιστικά με τα μη-σταθμισμένα ελάχιστα τετράγωνα και χρησιμοποιείται αυτή στην εκτίμηση των σ_i(ισοδύναμο) για περαιτέρω χρήση στον προσδιορισμό των παραμέτρων της ευθείας με τα σταθμισμένα ελάχιστα τετράγωνα.



Σχήμα Δ1. Το σφάλμα Δx στο x προκαλεί ένα ισοδύναμο σφάλμα Δy(ισοδ.) στο κατά τα άλλα ακριβές y.

5. Συντελεστής Γραμμικής Συσχέτισης

Σε αυτή την παράγραφο θα απαντηθεί το δεύτερο ερώτημα του προβλήματος της γραμμικής παλινδρόμησης, δηλ. δεδομένων των n ζευγών μετρήσεων (x_1, y_1), …(x_n, y_n) και των παραμέτρων της βέλτιστης ευθείας A_o και A_1, κατά πόσο ισχύει η αρχική υπόθεση της γραμμικής εξάρτησης του y από το x. Στην περίπτωση που η αβεβαιότητα των μετρήσεων y_i είναι γνωστή τότε μία απλή σύγκριση των πειραματικών σημείων με τα αντίστοιχα υπολογισμένα από τις παραμέτρους της βέλτιστης ευθείας $A_o + A_1 \cdot x_i$ είναι αρκετή για να απαντηθεί το ερώτημα. Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις όμως όπου κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό γιατί δεν μπορεί να γίνει μία αξιόπιστη αρχική εκτίμηση των αβεβαιοτήτων. Το ερώτημα μπορεί να τεθεί σε αυτή την περίπτωση ως εξής: σε ποιο βαθμό οι μετρήσεις είναι γραμμικά συσχετισμένες, δηλ. κατά πόσο η αύξηση της μιας μεταβλητής συνεπάγεται την αντίστοιχη αύξηση (θετική συσχέτιση) ή μείωση (αρνητική συσχέτιση) της άλλης.

Για να απαντηθεί το ερώτημα, ορίζεται ο συντελεστής (γραμμικής) συσχέτισης ως

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \qquad (\Delta.13)$$

όπου σ_x και σ_y είναι οι γνωστές τυπικές αποκλίσεις των μετρήσεων x_i και y_i αντίστοιχα, και σ_{xy} η συν-διακύμανση των μετρήσεων η οποία ορίζεται ως

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \qquad (\Delta.14)$$

Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι αν και τα σ_x και σ_y υπολογίζονται με τον γνωστό τρόπο, υπάρχει μία διαφοροποίηση ως προς την σημασία τους. Έτσι αυτά αναφέρονται σε n διαφορετικές τιμές μιας μεταβλητής και όχι σε n επαναληπτικές μετρήσεις για τον προσδιορισμό μίας τιμής της μεταβλητής. Επομένως, ενδέχεται οι μετρήσεις x_i να είναι επαναλήψιμες χωρίς υποχρεωτικά η τιμή της σ_x να είναι μικρή. Με αντικατάσταση των παραπάνω ο συντελεστής συσχέτισης γράφεται ως

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}} \qquad (\Delta.15)$$

Βάσει της παραπάνω σχέσης προκύπτει ότι το r μπορεί να κυμανθεί μεταξύ των τιμών ±1. Όταν το r παίρνει τις ακραίες τιμές τότε υπάρχει πλήρης συσχέτιση μεταξύ των μετρήσεων και αναμένεται αυτές να κείτονται πάνω σε μία ευθεία, η καλύτερα, λαμβάνοντας υπόψη τα πειραματικά σφάλματα κοντά σε μία ευθεία. Στην περίπτωση που το r είναι σχεδόν μηδέν τότε δεν υπάρχει ένδειξη συσχέτισης μεταξύ των πειραματικών μετρήσεων και επομένως δεν αναμένεται η σχέση μεταξύ των x και y να περιγράφεται από μία ευθεία.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε - Ο Υπολογισμός Αβεβαιοτήτων με Χρήση Μεθόδων Προσομοίωσης

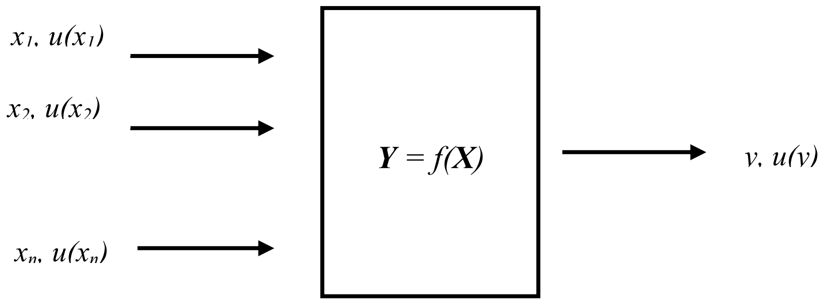
1. Εισαγωγή

Το ISO GUM παρέχει γενικές οδηγίες για τον προσδιορισμό της εξαγόμενης εκτίμησης y του μεγέθους Y, της τυπικής αβεβαιότητας και ενός διαστήματος εμπιστοσύνης ενός μετρητικού μοντέλου με ένα οποιοδήποτε αριθμό μεταβλητών εισόδου. Το συγκεκριμένο έγγραφο παρουσιάζει ένα συστηματικό τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος και για τον λόγο αυτό η μεθοδολογία που παρουσιάζεται σε αυτό έχει υιοθετηθεί από πολλούς οργανισμούς ενώ έχει εφαρμοσθεί σε πολλά πρότυπα και οδηγίες που αφορούν την μετρητική αβεβαιότητα. Κεντρικό σημείο της μεθοδολογίας είναι η χρήση ενός γραμμικοποιημένου μοντέλου του νόμου διάδοσης των αβεβαιοτήτων όπου οι εκτιμήσεις των μεταβλητών εισόδου του μοντέλου και των αβεβαιοτήτων τους προέρχονται από τις πιθανότερες τιμές και τυπικές αποκλίσεις των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανοτήτων των μεταβλητών. Αποτέλεσμα της διάδοσης των πληροφοριών αυτών είναι μία εκτίμηση του εξαγόμενου μεγέθους y, και της αντίστοιχης τυπικής αβεβαιότητας για τις συγκεκριμένες εκτιμήσεις των μεταβλητών εισόδου, καθώς και ο προσδιορισμός ενός διαστήματος εμπιστοσύνης βάσει της κατανομής t-Student για συγκεκριμένο αριθμό «δραστικών βαθμών ελευθερίας».

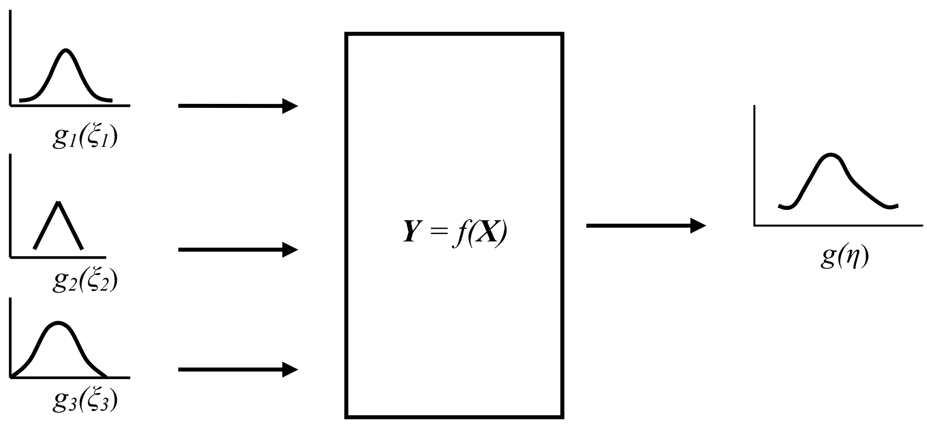
Ακόμη από την πρώτη έκδοση του ISO GUM αναγνωρίσθηκε ότι μπορεί να υπάρχουν περιπτώσεις όπου εφαρμογή της παραπάνω μεθοδολογίας δεν δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα και για τον λόγο αυτό επιτρέπει και άλλες μεθόδους για τον υπολογισμό της εκτίμησης και τυπικής αβεβαιότητας του εξαγόμενου μεγέθους. Οι περιπτώσεις όπου μπορεί να χρειασθεί η εφαρμογή άλλων υπολογιστικών μεθόδων αναφέρονται από τους συντάκτες του εγγράφου ως:

1. η ύπαρξη σημαντικής μη-γραμμικότητας στο μετρητικό μοντέλο ώστε το ανάπτυγμα Taylor 1^{ης} τάξης του να μην αποτελεί καλή προσέγγιση
2. η μη ισχύς του θεωρήματος του κεντρικού ορίου με αποτέλεσμα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτήτων της μεταβλητής εξόδου να μην είναι Κανονική κατανομή
3. η μη ικανοποιητική ισχύς της σχέσης Welch-Satterthwaite για τον υπολογισμό των δραστικών βαθμών ελευθερίας
4. η ύπαρξη αμφιβολίας ισχύος των προϋποθέσεων για την εφαρμογή του νόμου διάδοσης των αβεβαιοτήτων

Σε πρόσφατο συμπληρωματικό έγγραφο του ISO, περιγράφεται η εφαρμογή της υπολογιστικής μεθόδου προσομοίωσης Monte Carlo για την εκτίμηση των χαρακτηριστικών της μεταβλητής εξαγωγής όταν ισχύει κάποια από τις παραπάνω περιπτώσεις. Σε αντίθεση με τον νόμο διάδοσης των αβεβαιοτήτων, η μέθοδος αυτή προβλέπει την διάδοση των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανοτήτων των μεταβλητών εισόδου μέσω του μετρητικού μοντέλου και τον προσδιορισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανοτήτων της μεταβλητής εξόδου. Στην συνέχεια, εκτιμάται από αυτή η πιθανότερη τιμή, η τυπική απόκλιση της μεταβλητής εξόδου και ένα διάστημα εμπιστοσύνης για αυτή. Στα σχήματα Ε1.1 και Ε1.2 αναπαρίσταται γραφικά η διαφορά μεθοδολογίας μεταξύ των δύο τρόπων υπολογισμού. Στο σχήμα 1.2 οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανοτήτων των μεταβλητών εισόδου X_1, X_2, X_n είναι αντίστοιχα οι $g_i(\xi_i)$, i=1…3, ενώ της μεταβλητής εξόδου Y, g(η).



Σχήμα Ε1.1 Γραφική αναπαράσταση του υπολογισμού αβεβαιότητας με χρήση της κλασσικής θεώρησης της διάδοσης αβεβαιοτήτων.



Σχήμα Ε1.2 Γραφική αναπαράσταση του υπολογισμού αβεβαιότητας με την διάδοση των κατανομών των μεταβλητών εισόδου με χρήση της υπολογιστικής μεθόδου Monte-Carlo.

2. Υπολογισμός με Προσομοίωση Monte Carlo

Η προσομοίωση Monte Carlo για υπολογισμό αβεβαιοτήτων στηρίζεται στο ότι οποιαδήποτε τιμή που προκύπτει από μία κατανομή τυχαίων πιθανών εκτιμήσεων της μεταβλητής εισόδου, είναι το ίδιο επιτρεπτή όσο οποιαδήποτε άλλη εκτίμηση της μεταβλητής. Επομένως παίρνοντας για κάθε μεταβλητή εισόδου μία τυχαία τιμή από την αντίστοιχη προκαθορισμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτήτων παράγεται μία συγκεκριμένη, τυχαία αλλά καθ'όλα επιτρεπτή κατάσταση εισόδου για το μετρητικό μοντέλο. Η τιμή που υπολογίζεται από το μοντέλο αποτελεί μία πιθανή εκτίμηση της μεταβλητής εξόδου. Η επανάληψη της διαδικασίας αυτής Μ φορές ($M \approx 10^4$) παράγει μία προσέγγιση της κατανομής των πιθανών εκτιμήσεων της μεταβλητής εξόδου.

Επιγραμματικά, η μέθοδος λειτουργεί ως εξής:

Α) παραγωγή ενός δείγματος μεγέθους Ν με δειγματοληψία από τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανοτήτων των Ν μεταβλητών εισόδου X_i. Τόσο ο βαθμός τυχαιότητας όσο και η ανεξαρτησία των στοιχείων του δείγματος εξαρτάται στον μέγιστο βαθμό από την γεννήτρια τυχαίων αριθμών που θα χρησιμοποιηθεί.

Β) υπολογισμός της εκτίμησης της μεταβλητής εξόδου Y βάσει του μετρητικού μοντέλου για το δείγμα των Ν μεταβλητών εισόδου.

Γ) επανάληψη της διαδικασίας ένα μεγάλο αριθμό επαναλήψεων Μ, με αποτέλεσμα την παραγωγή Μ ανεξάρτητων εκτιμήσεων της μεταβλητής εξόδου από τα Μ δείγματα μεγέθους Ν των εκτιμήσεων των μεταβλητών εισόδου. Ο αριθμός των δοκιμών Monte Carlo πρέπει να επιλεγεί κατάλληλα για την πιο αξιόπιστη προσέγγιση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανοτήτων της μεταβλητής εξόδου. Συνηθίζεται η επιλογή να μην γίνεται "a priori" αλλά με κάποια μέθοδο που επιτρέπει την προσαρμογή του Μ κατά την διάρκεια της προσομοίωσης, γιατί ο αριθμός των δοκιμών εξαρτάται από την μορφή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανοτήτων του εξαγόμενου μεγέθους.

Δ) παραγωγή της συγκεντρωτικής συνάρτησης κατανομής του εξαγόμενου μεγέθους και από αυτήν υπολογισμός της πιθανότερης τιμής και τυπικής απόκλισής της καθώς και διαστήματος εμπιστοσύνης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤ - Παραδείγματα Ισοζυγίων Αβεβαιότητας σε Διακριβώσεις Μηχανικών Μεγεθών

Ι. Όγκος - Διακρίβωση δεξαμενής με την ογκομετρική μέθοδο

1. Περιγραφή διαδικασίας

Το αντικείμενο της διακρίβωσης είναι ο προσδιορισμός του «περιεχόμενου» όγκου (*contained volume*) δεξαμενής χωρητικότητας 2000 L σε θερμοκρασία 15 ^{o} C που είναι η θερμοκρασία αναφοράς της δεξαμενής σύμφωνα με τον κατασκευαστή. Για την πραγματοποίηση της διακρίβωσης χρησιμοποιήθηκε πρότυπο ογκομετρικό δοχείο χωρητικότητας 200 L κατάλληλης ακρίβειας. Σύμφωνα με την ογκομετρική μέθοδο, ο όγκος του νερού που περιέχεται στο πρότυπο ογκομετρικό δοχείο μεταφέρεται στη δεξαμενή σε σύντομο χρονικό διάστημα ενώ πριν την μεταφορά κάθε διακριτής ποσότητας νερού μεγέθους 200 L καταγράφεται η θερμοκρασία του νερού στο πρότυπο δοχείο. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται δέκα (10) φορές έως την πλήρωση της δεξαμενής και μετά από πάροδο χρόνου ίσου προς πέντε (5) λεπτά καταγράφεται η θερμοκρασία του νερού στη δεξαμενή. Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται μία ακόμη φορά.

2. Υπολογισμοί

Ο όγκος της δεξαμενής χωρητικότητας 2000 L στους 15 ^{o} C δίνεται από τη σχέση:

$$V_{15} = 10 \times V_o \left[1 - 3\alpha_N \left(15 - \overline{t_N}\right)\right] \times \left[1 + \beta\left(t_p - \overline{t_N}\right)\right] \times \left[1 + 3\alpha_p\left(15 - t_p\right)\right]$$

(ΣΤ.Ι.1)

όπου: V_{15} = όγκος της πρότυπης δεξαμενής στη θερμοκρασία αναφοράς (15 ^{o}C), L
V_o= όγκος του προτύπου δοχείου στη θερμοκρασία αναφοράς (15 ^{o}C), L
$3\alpha_N$= συντελεστής κυβικής διαστολής του προτύπου δοχείου, 1/^{o}C
$\overline{t_N}$ = μέση τιμή θερμοκρασίας του νερού κατά τη διάρκεια των 10 πληρώσεων του προτύπου δοχείου, ^{o}C
β= συντελεστής κυβικής διαστολής του νερού, 1/^{o}C
$3\alpha_p$= συντελεστής κυβικής διαστολής του υλικού της πρότυπης δεξαμενής, 1/^{o}C
t_p = θερμοκρασία του νερού στη πρότυπη δεξαμενή μετά την πλήρωσή της, ^{o}C

Η απόκλιση της ένδειξης της υπό διακρίβωση δεξαμενής από την «πραγματική τιμή» όπως αυτή υλοποιείται από τον μεταφερόμενο, από το πρότυπο δοχείο, όγκο νερού προκύπτει από τη σχέση:

$$E(\%) = \frac{V_i - V_{15}}{V_{15}} \times 100 \qquad \text{(ΣΤ.Ι.2)}$$

όπου: V_i= ένδειξη όγκου της κλίμακας της δεξαμενής στη θερμοκρασία αναφοράς (15 ^{o}C), L
V_{15}= όγκος της πρότυπης δεξαμενής στη θερμοκρασία αναφοράς (15 ^{o}C), L
Ε= επί τοις εκατό απόκλιση της ένδειξης της δεξαμενής από την «πραγματική τιμή»

Η τελική απόκλιση της ένδειξης της δεξαμενής προέκυψε ως η μέση τιμή δύο διαδοχικών πληρώσεων της δεξαμενής.

3. Ισοζύγιο Αβεβαιοτήτων

Το ισοζύγιο αβεβαιοτήτων για το παράδειγμα του ογκομετρικού προσδιορισμού της χωρητικότητας της δεξαμενής καταρτίζεται με βάση το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφεται από την εξίσωση (1). Η μετρητική αβεβαιότητα του αποτελέσματος της παρούσας διακρίβωσης αναφέρεται στην επί τοις εκατό (%) απόκλιση της ένδειξης της δεξαμενής από την «πραγματική τιμή». Η τιμή της αβεβαιότητας αυτής προκύπτει από τον συνδιασμό των επιμέρους αβεβαιοτήτων της ένδειξης της δεξαμενής, V_i, και της αντίστοιχης «πραγματικής τιμής», V_{15}, σύμφωνα με το μοντέλο **R**oot **S**um **S**quare:

$$u(E) = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial V_i}\right)^2 u^2(V_i) + \left(\frac{\partial E}{\partial V_{15}}\right)^2 u^2(V_{15})} \qquad (\Sigma\text{T.I.3})$$

$$\frac{\partial E}{\partial V_i} = \frac{100}{V_{15}} = \frac{100}{2000{,}111} = 0.050 \qquad (\Sigma\text{T.I.4})$$

$$\frac{\partial E}{\partial V_{15}} = -\frac{V_i \times 100}{V_{15}^2} = -0.050 \qquad (\Sigma\text{T.I.5})$$

Οι παράγοντες οι οποίοι συνεισφέρουν στη συνολική αβεβαιότητα του όγκου V_{15} και η αντίστοιχη συνεισφορά τους δίνονται στο ισοζύγιο αβεβαιοτήτων του Πίνακα Ι.1.

Πίνακας Ι.1. Ισοζύγιο αβεβαιοτήτων της τιμής του όγκου της δεξαμενής στους 15 ^oC, V_{15}

Μέγεθος ***X_i***	***Εκτίμηση*** ***x_i***	***Αβεβαιότητα*** ***u_i***	***Κατανομή***	***Τυπική Αβεβαιότητα*** ***$u(x_i)$***	***Συντ. Ευαισθησίας***	***Συνεισφορά*** ***$u_i(y)$***
V_o	19999,8 (ml)	40 (ml)	Κανονική	20 (ml)	10	200,011
3αN	4,9E-05 (1/^{o}C)		Κανονική	1,5E-06 (1/^{o}C)	595999	0,893999
3α_p	3,6E-05 (1/^{o}C)		Κανονική	1,5E-06 (1/^{o}C)	-639999,36	0,959999
β	1,2E-04 (1/^{o}C)		Κανονική	1,0E-05 (1/^{o}C)	439999,56	4,3999956
t_p	1,5E-06(^{o}C)	0,4 (^{o}C)	Κανονική	0,2 (^{o}C)	1,67E+02	33,4799665
t_N	17,98(^{o}C)	0,4	Κανονική	0,2 (^{o}C)	1,42E+02	28,399972
Φυσαλίδες Νερού			Τετρ/κή	20 (ml)	1	20
Μεταβολή ποσότητας υπολοίπου υγρού			Τετρ/κή	25 (ml)	1	25
					Συνολική τυπική αβεβαιότητα Τύπου Β, $u_B(V_{15})$	***207,3 ml***
					Τυπική αβεβαιότητα Τύπου Α, $u_A(V_{15})$	***24 ml***
					Συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα $u(V_{15})$, ml	**209 ml**

Η συνολική αβεβαιότητα της τιμής της ένδειξης της δεξαμενής, V_i, προκύπτει από το ισοζύγιο αβεβαιοτήτων του Πίνακα Ι.2.

Πίνακας Ι.2. Ισοζύγιο αβεβαιοτήτων της ένδειξης της δεξαμενής στους 15 °C, V_i

Μέγεθος X_i	***Εκτίμηση*** x_i	***Αβεβαιότητα*** u_i	***Κατανομή***	***Τυπική Αβεβαιότητα*** $u(x_i)$	***Συντ. Ευαισθησίας***	***Συνεισφορά*** $u_i(y)$
Διακριτική ικανότητα κλίμακας		200 (ml)	Τετραγωνική	115 (ml)	1	115
Επαναληψι-μότητα		177 (ml)	Κανονική	177 (ml)	1	177
Συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα u(Vi), ml						**211.3 ml**

Η συνδιασμένη αβεβαιότητα στην τιμή της απόκλισης Ε μεταξύ της ένδειξης της δεξαμενής και του υπολογιζόμενου όγκου στους 15 ° C προκύπτει από την εξίσωση (ΣΤ.Ι.3) και ισούται με:

$$u(E) = 0.015\%$$

Η διευρυμένη αβεβαιότητα της επί τοις εκατό (%) απόκλισης προκύπτει από τη συνδιασμένη αβεβαιότητα πολλαπλασιαζόμενη με τον παράγοντα 2:

$$U(E) = 2 \times u(E) = 0.03\%$$

Το τελικό αποτέλεσμα της διακρίβωσης εκφράζεται ως εξής:

Περιεχόμενος όγκος δεξαμενής χωρητικότητας 2000 λίτρων

Απόκλιση από την «πραγματική τιμή»: -0,023 % ± 0,030%

ΙΙ. Ροή - Διακρίβωση μετρητή αερίου τύπου διαφράγματος

1.Περιγραφή διαδικασίας

Το αντικείμενο της διακρίβωσης είναι ο προσδιορισμός της καμπύλης σφάλματος του μετρητή κατά μήκος του εύρους της κλίμακας μέτρησής του. Για το σκοπό αυτό προσδιορίζεται η απόκλιση της ένδειξης του μετρητή από την αντίστοιχη ένδειξη του προτύπου ροής σε πέντε τιμές παροχής οι οποίες περιλαμβάνουν τα σημεία Q_{max}, 0,7Q_{max}, 0,4Q_{max}, 0,2 Q_{max} και 0,1Q_{max}. Σε κάθε σημείο ελέγχου πραγματοποιούνται 3 μη διαδοχικές επαναλήψεις ξεκινώντας από τη μέγιστη παροχή ενώ η διαδικασία διακρίβωσης περιλαμβάνει δύο όμοιες σειρές μετρήσεων σύμφωνα με τα παραπάνω οι οποίες διενεργούνται κατά τη διάρκεια δύο διαδοχικών ημερών. Σε κάθε μέτρηση καταγράφονται η τιμή θερμοκρασίας και πίεσης του αέρα στην έξοδο του μετρητή. Με βάση τις τιμές αυτές γίνεται αναγωγή της παροχής του μετρητή σε standard συνθήκες θερμοκρασίας και πίεσης (T=21,1 ^{o} C, P=1013,25 mbar) η οποία εκφράζεται σε μονάδες SLPM. Η ένδειξη του προτύπου ροής ανάγεται επίσης στις ίδιες standard συνθήκες και με βάση τις ανοιγμένες αυτές ενδείξεις προσδιορίζεται η επί τοις εκατό (%) απόκλιση του μετρητή σε κάθε μία τιμή ελέγχου. Οι μετρητές τύπου διαφράγματος φέρουν ενδείκτη με τροχίσκους του οποίου η ένδειξη αναφέρεται σε όγκο αέρα εκφρασμένου σε κυβικά μέτρα, ελάχιστη υποδιαίρεση ένα λίτρο και διακριτική ικανότητα 0,2 λίτρα. Κατά τη διάρκεια μιας μέτρησης καταγράφεται με χρονομέτρη ακριβείας ο χρόνος, t, που απαιτείται για τη διέλευση από τον μετρητή όγκου αέρα, V, ίσου προς 120 λίτρα. Ο όγκος αυτός είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του κυκλικού όγκου, V_c, του συγκεκριμένου μετρητή (V_c = 1,2 L).

2.Υπολογισμοί

Παροχή μετρητή ανοιγμένη σε STP συνθήκες:

$$Q_i(SLPM) = \frac{V}{t} \times \frac{P}{1013.25} \times \frac{294.25}{T} \qquad (\Sigma T.II.1)$$

Απόκλιση της ένδειξης του μετρητή σε STP συνθήκες από την αντίστοιχη ένδειξη του προτύπου Q_m:

$$E(SLPM) = Q_i - Q_m \qquad (\Sigma T.II.2)$$

3. Ισοζύγιο αβεβαιοτήτων

Η αβεβαιότητα της ένδειξης του προτύπου είναι δεδομένη και προκύπτει από το αντίστοιχο ισοζύγιο αβεβαιοτήτων του Εργαστηρίου Ροής όπως αυτό περιγράφεται και αναλύεται στις αντίστοιχες ειδικές διαδικασίες του εργαστηρίου.

Οι παράγοντες που συνεισφέρουν στην αβεβαιότητα της ένδειξης του μετρητή όπως αυτή υπολογίζεται από τη σχέση (ΣΤ.ΙΙ.1) παρατίθενται στον ακόλουθο πίνακα. Στο ισοζύγιο αναλύεται τέλος και προσδιορίζεται η αβεβαιότητα της απόκλισης του μετρητή ενδεικτικά για τιμή παροχής ίση προς 100 LPM.

Πίνακας ΙΙ.1. Ισοζύγιο αβεβαιοτήτων

Μέγεθος X_i	*Εκτίμηση* x_i	*Αβεβαιότητα* u_i	*Κατανομή*	*Τυπική Αβεβαιότητα* $u(x_i)$	*Συντ. Ευαισθησίας*	*Συνεισφορά* $u_i(y)$
Q_i (SLPM)	100					**0,16704254**

						1
1. Volume	120 L					
volume resolution (L)		0,2	rectangular	0,08165	0,850918993	0,00483
2. Time	1 min					
time uncertainty (min)				0,00127	-86,89	0,01227
timer uncerainty syst (min)				0,00096	1	0,00096
timer calibration(min)		1,6667E-06	normal	0,0000008	1	
timer actuation(min)		0,00333333	triangular	0,00096	1	
time spread (min)		0,00065	t-student/v=5	0,00084	1	0,00084
Combined uncertainty(Qi) (LPM)						0,131
3. Gas pressure	1017 mbar					
pressure uncertainty (mbar)			normal	0,20000	0,099942909	0,000400
4. Gas temperature	296 K					
temperature uncertainty (K)			normal	0,30000	-0,34257478	0,0105622
Qi (LPM)				0,13076	0,995412902	0,0169415
Q_m (SLPM)		0,2	normal	0,1		***0,1***
Combined uncertainty E (SLPM)						0,195
Expanded uncertainty E (SLPM)						**0,39**

Η εκτίμηση της αβεβαιότητας που οφείλεται στη διασπορά των τιμών του χρόνου βασίζεται στη συγκεντρωτική διακύμανση (pooled variance) δύο δειγμάτων μεγέθους n=3 (σύνολο έξι (6) παρατηρήσεων) τα οποία προέκυψαν κατά τη διάρκεια των δύο διαδοχικών ημερών.

Η συνδυασμένη αβεβαιότητα της απόκλισης, u(E), προκύπτει από τη σχέση:

$$u(E) = \sqrt{u^2(Q_i) + u^2(Q_m)} \qquad (ΣΤ.ΙΙ.3)$$

Η διευρυμένη αβεβαιότητα της τιμής της απόκλισης προκύπτει από τη συνδιασμένη αβεβαιότητα πολλαπλασιαζόμενη με τον παράγοντα 2:

$$U(E) = 2 \times u(E) = 0.39(SLPM)$$

Το τελικό αποτέλεσμα της διακρίβωσης για το συγκεκριμένο παράδειγμα εκφράζεται ως εξής:

Παροχή	**Ένδειξη Οργάνου**	**Ένδειξη Προτύπου**	**Απόκλιση**	**Αβεβαιότητα**	**Απόκλιση**
(LPM)	**(SLPM)**	**(SLPM)**	**(SLPM)**	**+/- (SLPM)**	**(%)**
100	102,4	100,7	1,8	0,4	1,8

III. Πίεση - Διακρίβωση αναλογικού μετρητή πίεσης τύπου Bourdon

1. Περιγραφή

Η διακρίβωση πραγματοποιήθηκε μέσω της σύγκρισης των ενδείξεων του μετρητή με την τιμή πίεσης αναφοράς, υπό συνθήκες σταθεροποιημένων ενδείξεων. Το όργανο διακριβώθηκε σε όλο το εύρος μέτρησης, σε σημεία κατανεμημένα ομοιόμορφα.

Η διαδικασία διακρίβωσης περιέλαβε τα εξής βήματα :

1. Εφαρμογή δύο διαδοχικών προ-φορτώσεων – εκτονώσεων του μετρητή στη μέγιστη τιμή πίεσης.
2. Υλοποίηση των ενδιάμεσων τιμών πίεσης αναφοράς κατ' αύξουσα σειρά, μέχρι τη μέγιστη τιμή πίεσης. Λήψη της σταθεροποιημένης ένδειξης του μετρητή μετά από ελαφρύ κτύπημά του
3. Στη μέγιστη τιμή πίεσης αναμονή για τουλάχιστον 5 λεπτά, σε συνθήκες σταθεροποιημένης ένδειξης πριν τη καταγραφή της ένδειξης
4. Υλοποίηση των ενδιάμεσων τιμών πίεσης αναφοράς, κατά φθίνουσα σειρά και λήψη των ενδείξεων του μετρητή, όπως στο βήμα 2
5. Επανάληψη του βήματος 2

Η επιλογή των ανωτέρω παραμέτρων διακρίβωσης, έγινε για όργανο αλληλουχίας διακρίβωσης B, με βάση την κλάση ακρίβειας του μετρητή.

2.Υπολογισμοί

Για κάθε σημείο διακρίβωσης η απόκλιση του μετρητή, δίνεται από τη σχέση (ΣΤ.III.1). Δεδομένου ότι οι ενδείξεις του μετρητή είναι 3 (κατ' αύξουσα, φθίνουσα σειρά και αύξουσα σειρά), το μαθηματικό μοντέλο είναι διατυπωμένο ως προς τις μέσες τιμές ενδείξεων του μετρητή.

$$\Delta P_{mean} = P_{ind,\,mean} - P_{standard} + \delta P_{zero\ deviation} + \delta P_{repeatability} + \delta P_{hysteresis} \qquad (ΣΤ.III.1)$$

όπου:
- ΔP_{mean} = μέσος όρος απόκλισης μετρητή, bar
- $P_{ind,\,mean}$ = μέσος όρος ενδείξεων μετρητή, bar
- $P_{standard}$ = τιμή πίεσης αναφοράς, bar
- $\delta P_{zero\ deviation}$ = απόκλιση στην τιμή μηδέν, bar
- $\delta P_{repeatability}$ = απόκλιση λόγω επαναληψιμότητας, bar
- $\delta P_{hysteresis}$ = απόκλιση λόγω υστέρησης, bar

3.Ισοζύγιο Αβεβαιοτήτων

Το ισοζύγιο αβεβαιοτήτων καταρτίζεται με βάση το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφεται από την εξίσωση (ΣΤ.III.1). Οι παράγοντες οι οποίοι συνεισφέρουν στη συνολική αβεβαιότητα της ένδειξης ΔP_{mean} και η αντίστοιχη συνεισφορά τους δίνονται στο ισοζύγιο αβεβαιοτήτων του Πίνακα III.1.

Πίνακας III.1. Ισοζύγιο αβεβαιότητας διακρίβωσης μετρητή Bourdon

Μέγεθος	*Εκτίμηση*	*Εύρος κατανομής*	*Κατανομή*	*Τυπική Αβεβαιότητα $u(x_i)$*	*Συντ. Ευαισθησίας*	*Συνεισφορά*	*Μονάδες*
X_i	x_i	2α	$P(x_i)$	$u(x_i)$	c_i	$u_i(y)$	

$P_{ind, mean}$	$P_{ind, mean}$	2r	Ορθογωνική	$u(r)= \sqrt{[1/3(2r/2)^2]}$	1	u_r	bar
$P_{standard}$	$P_{i, standard}$		Κανονική	u(standard)	-1	$u_{standard}$	bar
$\delta P_{zero\ deviation}$	0	f_0	Ορθογωνική	$u(f_0)= \sqrt{[1/3(f_0/2)^2]}$	1	u_{f0}	bar
$\delta P_{repeatability}$	0	b'	Ορθογωνική	$u(b')= \sqrt{[1/3(b'/2)^2]}$	1	$u_{b'}$	bar
$\delta P_{hysteresis}$	0	h	Ορθογωνική	$u(h)= \sqrt{[1/3(h/2)^2]}$	1	u_h	bar
Y	ΔP_{mean}					u(y)	bar

όπου: r = το ήμισυ της *αναγνωσιμότητας* της αναλογικής διαβάθμισης του μετρητή (συνήθως ½, 1/5 ή 1/10), bar

f_0 = απόκλιση στο μηδέν, bar, υπολογισμένη ως εξής :
$f_0 = \max [|x_{2,0} - x_{1,0}|, |x_{4,0} - x_{3,0}|, |x_{6,0} - x_{5,0}|]$
όπου : $x_{i,j}$ = η ένδειξη του μετρητή στη σειρά μέτρησης M_i (=1,6), στο σημείο διακρίβωσης j (=0,8) και j = 0 το σημείο μηδέν

b' = επαναληψιμότητα, bar, υπολογισμένη ως εξής :
$b'_{up, j} = |(x_{3,j} - x_{3,0}) - (x_{1,j} - x_{1,0})|$
$b'_{down, j} = |(x_{4,j} - x_{4,0}) - (x_{2,j} - x_{2,0})|$
$b'_{mean, j} = \max (b'_{up, j}, b'_{down, j})$

h = υστέρηση, υπολογισμένη ως εξής :
$h = 1/n\ [|(x_{2,j} - x_{1,0}) - (x_{1,j} - x_{1,0})| + |(x_{4,j} - x_{3,0}) - (x_{3,j} - x_{3,0})| + |(x_{6,j} - x_{5,0}) - (x_{5,j} - x_{5,0})|$
όπου : n = ο αριθμός των πλήρων κύκλων μέτρησης

Η διευρυμένη αβεβαιότητα μέτρησης (k=2) δίνεται από τη σχέση :

$$U_{mean} = k \cdot u_{mean} \qquad (ΣΤ.ΙΙΙ.2)$$

$$U_{mean} = k\sqrt{u_{standard}^2 + u_{resolution}^2 + u_{zerodeviation}^2 + u_{repeatability}^2 + u_{hysteresis}^2} \qquad (ΣΤ.ΙΙΙ.3)$$

Οι υπολογισμοί που ακολουθούν παρουσιάζονται για ένα επιλεγμένο σημείο του συνολικού εύρους διακρίβωσης του οργάνου, στην περιοχή των 13,7 περίπου bar. Παρατίθενται επίσης οι ενδείξεις του μετρητή στο μηδέν για τον υπολογισμό της απόκλισης στο 0.

Παραδοχές:
Α. Όργανο υπό διακρίβωση («μετρητής»)
- Ονομαστική κλάση ακρίβειας κατασκευαστή : 0,5% fs
- Εύρος μέτρησης : 25 bar
- Διαβάθμιση αναλογικής κλίμακας : 0,2 bar
- Αναγνωσιμότητα : 0,1 bar (=1/2 διαβάθμισης)

Β. Χρησιμοποιηθέν πρότυπο αναφοράς
- Είδος : Ζυγός πίεσης

Γ. Συνθήκες διακρίβωσης
- Μέσο μετάδοσης πίεσης : Λάδι
- Θερμοκρασία περιβάλλοντος : 24,8 – 25,1 ± 0,2 ^{0}C (k=2)
- Πυκνότητα αέρα : 1,1890 – 1,1901 ± 0,0014 kg/m^3 (k=2)

Ακολουθούμενο πρότυπο : DKD-R 6-1 ‘Calibration of Pressure Gauges”, March 2002

Τα πρωτογενή αποτελέσματα των μετρήσεων είναι τα εξής :

Τιμή πίεσης αναφοράς : 13,6829 bar ± 1,3 hPa (k=2)

Σημ : Η ανωτέρω τιμή είναι διορθωμένη ως προς την υψομετρική διαφορά προτύπου αναφοράς και μετρητή, ενώ η διευρυμένη αβεβαιότητα περιλαμβάνει και την αβεβαιότητα της υψομετρικής διόρθωσης

Ενδείξεις μετρητή :

Σημείο Διακρίβωσης	M1 (αύξουσα)	M2 (φθίνουσα)	M3 (αύξουσα)
bar			
0	0,1	0,1	0,1
13,7	13,7	13,8	13,8

Πίνακας 2. Ισοζύγιο αβεβαιότητας μετρητή Bourdon, στην περιοχή 13,7 bar

Μέγεθος	***Εκτίμηση***	***Εύρος κατανομής***	***Κατανομή***	***Τυπική Αβεβαιότητα $u(x_i)$***	***Συντ. Ευαισθησίας***	***Συνεισφορά***	***Μονάδες***
X_i	x_i	2α	$P(x_i)$	$u(x_i)$	c_i	$u_i(y)$	
$P_{ind,\ mean}$	13,7 [1]	0,1	Ορθογωνική	0,03	1	0,03	bar
$P_{standard}$	13,6829		Κανονική	0,0006	-1	0,0006	bar
$\delta P_{zero\ deviation}$	0	0	Ορθογωνική	0	1	0	bar
$\delta P_{repeatability}$	0	0,1	Ορθογωνική	0,03	1	0,03	bar
$\delta P_{hysteresis}$	0	0,1	Ορθογωνική	0,03	1	0,03	bar
Y	ΔP_{mean}=0,0					0,05	bar

Σημ (1) : Η τιμή είναι διορθωμένη ως προς την ένδειξη στο μηδέν

Άρα η συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα της απόκλισης του οργάνου στην περιοχή των 13,7 bar ισούται με:

$$u(\Delta P_{mean}) = 0{,}05 \text{ bar}$$

Η διευρυμένη αβεβαιότητα της απόκλισης προκύπτει από τη συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα πολλαπλασιασμένη με τον παράγοντα 2:

$$u(\Delta P_{mean}) = 2\text{X } u(\Delta P_{mean}) = 0{,}1 \text{ bar}$$

Το τελικό αποτέλεσμα της διακρίβωσης εκφράζεται ως εξής:

Στην περιοχή μέτρησης 13,7 bar για μετρητή πίεσης Bourdon :

Απόκλιση από την «πραγματική τιμή» του μετρητή : 0 ± 0,1 bar (k=2)

IV. Δύναμη - Διακρίβωση αισθητηρίων δύναμης

1. Περιγραφή

Σε κάθε διαδικασία διακρίβωσης αισθητηρίων δύναμης, αφενός περιλαμβάνονται συγκεκριμένοι έλεγχοι μετρολογικών χαρακτηριστικών των αισθητηρίων (μετρητικών παραμέτρων), οι οποίοι παρέχουν δεδομένα για την εκτίμηση – υπολογισμό της αντίστοιχης μεταβλητότητας (variance) του αποτελέσματος της μέτρησης και αφετέρου υπάρχει ένα σύνολο παραμέτρων που υπεισέρχονται στην αβεβαιότητα των μετρήσεων, η τιμή των οποίων είτε είναι γνωστή εκ των προτέρων και ανεξάρτητη από τη διαδικασία και τα εξαγόμενα των μετρήσεων (διακριτική ικανότητα μετρητικής διάταξης, αβεβαιότητα στην τιμή της δύναμης αναφοράς), είτε διασφαλίζεται από τη διαδικασία μέτρησης ότι κείται εντός προκαθορισμένων ορίων που εξασφαλίζουν αμελητέα επίδραση στο εξαγόμενο της μέτρησης (περιβαλλοντικές συνθήκες, σφάλμα έκκεντρης τοποθέτησης αισθητηρίου).

Οι μετρητικές παράμετροι των οποίων η επίδραση προσδιορίζεται από τη διαδικασία μέτρησης και η αντίστοιχη μεταβλητότητα υπολογίζεται από τα δεδομένα της μέτρησης είναι:

1) Επαναληψιμότητα των ενδείξεων της μετρητικής διάταξης κατά τη φόρτισή της με συγκεκριμένο φορτίο υπό σταθερές συνθήκες (θέση, περιβάλλον, χρόνος-ημέρα, χειριστής).
   Η αντίστοιχη μεταβλητότητα θα αναφέρεται στο εξής ως *αναπαραγωγησιμότητα χωρίς περιστροφή* (reproducibility without rotation) και θα συμβολίζεται με w^2_{rep}.
2) Αναπαραγωγησιμότητα των ενδείξεων της μετρητικής διάταξης κατά τη φόρτισή της με συγκεκριμένο φορτίο, για διάφορες θέσεις που προκύπτουν από περιστροφή του αισθητηρίου δύναμης ως προς άξονα (τον άξονα φόρτισης) και για σταθερές τις λοιπές συνθήκες. Η αντίστοιχη μεταβλητότητα θα αναφέρεται στο εξής ως *αναπαραγωγησιμότητα με περιστροφή* (reproducibility with rotation) και θα συμβολίζεται με w^2_{rot}.
3) Απόκλιση από το μηδέν, δηλαδή διαφορά της ένδειξης κατά τη μετάβαση από κατάσταση φόρτισης, σε ελεύθερη κατάσταση ως προς το μηδέν (αρχική κατάσταση πριν από κάθε σειρά μετρήσεων). Η αντίστοιχη μεταβλητότητα θα αναφέρεται στο εξής ως *απόκλιση του μηδενός* (zero deviation) και θα συμβολίζεται με w^2_{zer}.
4) Απόκλιση καμπύλης παρεμβολής, δηλαδή η διαφορά της τιμής δύναμης όπως υπολογίζεται από την καμπύλη παρεμβολής (1ης, 2ης , ή 3ης τάξης πολυώνυμο οι συντελεστές του οποίου προκύπτουν με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων) και της τιμής της δύναμης αναφοράς. Η αντίστοιχη μεταβλητότητα θα αναφέρεται στο εξής ως *απόκλιση παρεμβολής* (interpolation deviation) και θα συμβολίζεται με w^2_{inp}.

5) Υστέρηση, δηλαδή η διαφορά μεταξύ των ενδείξεων της μετρητικής διάταξης που λαμβάνονται κατά την ανοδική και καθοδική προσέγγιση δεδομένης δύναμης αναφοράς. Η αντίστοιχη μεταβλητότητα θα αναφέρεται στο εξής ως *υστέρηση* (reversibility) και θα συμβολίζεται με w^2_{rev}.

Άλλοι παράμετροι που υπεισέρχονται στη μέτρηση είναι:

1) Η διακριτική ικανότητα της ενδεικτικής μονάδας της μετρητικής διάταξης. Η αντίστοιχη μεταβλητότητα θα αναφέρεται στο εξής ως *διακριτική ικανότητα* (resolution) και θα συμβολίζεται με w^2_{res}.
2) Η συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα της δύναμης αναφοράς, που συνδέεται με τη καλύτερη μετρητική ικανότητα της μηχανής αναφοράς που υλοποιεί τις πρότυπες δυνάμεις. Η αντίστοιχη μεταβλητότητα θα αναφέρεται στο εξής ως *βέλτιστη μετρητική ικανότητα* (best measurement capability) και θα συμβολίζεται με w^2_{bmc}.

Τέλος παράμετροι που υπεισέρχονται στη μέτρηση αλλά θεωρούνται αμελητέας συνεισφοράς τηρουμένων των διαδικασιών του συστήματος ποιότητας του εργαστηρίου είναι:

1) Οι περιβαλλοντικές συνθήκες με την ευρύτερη έννοια δηλαδή η θερμοκρασιακή σταθερότητα, η απουσία ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, η απουσία δονήσεων.
2) Η τοποθέτηση του αισθητηρίου στο χώρο δοκιμής.
3) Η καταλληλότητα των εξαρτημάτων προσαρμογής.

Οι μονάδες ένδειξης των μετρητικών διατάξεων δύναμης, εφόσον αποτελούν σύστημα με το αισθητήριο ή το σετ αισθητηρίων προς διακρίβωση δεν είναι απαραίτητο να διακριβώνονται ξεχωριστά και κατά συνέπεια στον υπολογισμό της αβεβαιότητας των μετρήσεων δεν συμπεριλαμβάνεται καμία συνεισφορά που συναρτάται με αυτές.

Η επεξεργασία των παραπάνω μεταβλητοτήτων για την εξαγωγή της διευρυμένης αβεβαιότητας της διακρίβωσης, έχει στατικό χαρακτήρα, με την έννοια ότι δεν συμπεριλαμβάνονται δυναμικά εξαρτώμενες μεταβολές (ολίσθηση με το χρόνο των μετρολογικών χαρακτηριστικών των αισθητηρίων και των μονάδων ένδειξης, θερμοκρασιακή ολίσθηση των αισθητηρίων και των μονάδων ένδειξης) ή συγκυριακές επιδράσεις κατά τη χρήση της μετρητικής διάταξης (συνθήκες φόρτισης, χρησιμοποιούμενα εξαρτήματα προσαρμογής).

2.Υπολογισμοί

Στο ISO 376: 1999 «ΜΕΤΑΛΛΙΚΑ ΥΛΙΚΑ - ΔΙΑΚΡΙΒΩΣΗ ΟΡΓΑΝΩΝ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΟΜΟΑΞΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ», η διαδικασία διακρίβωσης περιλαμβάνει τέσσερις (4) σειρές μετρήσεων εκ των οποίων οι δύο τελευταίες περιλαμβάνουν δύο υποσειρές (μια κατά αύξουσα και μια κατά φθίνουσα πορεία). Κατά συνέπεια οι σειρές συνολικά είναι έξι (6) και αναλυτικά είναι ως ακολούθως:

Σειρά1: Αύξουσα πορεία φόρτισης στην αρχική θέση (0^o)

Σειρά2: Αύξουσα πορεία φόρτισης στην αρχική θέση (0^o)

Σειρά3: Αύξουσα πορεία φόρτισης σε προσανατολισμό ως προς την αρχική θέση 120^o

Σειρά4: Φθίνουσα πορεία φόρτισης σε προσανατολισμό ως προς την αρχική θέση 120^o

Σειρά5: Αύξουσα πορεία φόρτισης σε προσανατολισμό ως προς την αρχική θέση 240^o

Σειρά6: Φθίνουσα πορεία φόρτισης σε προσανατολισμό ως προς την αρχική θέση 240^o

Ο ορισμός των παραμέτρων μέτρησης είναι ως ακολούθως:

1) **Αναπαραγωγισιμότητα χωρίς περιστροφή**:

$$b' = \left| \frac{x_2 - x_1}{\overline{x_{wr}}} \right| \times 100, \qquad (ΣΤ.IV.1)$$

όπου

$\overline{x_{wr}} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, και x_1, x_2 οι ενδείξεις της μετρητικής διάταξης σε δεδομένο φορτίο αναφοράς κατά την εκτέλεση των σειρών 1, 2

2) **Αναπαραγωγισιμότητα με περιστροφή**:

$$b = \left| \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\overline{x_r}} \right| \times 100, \qquad (ΣΤ.IV.2)$$

όπου

$\overline{x_r} = \dfrac{x_1 + x_3 + x_5}{3}$, και x_1, x_3, x_5 οι ενδείξεις της μετρητικής διάταξης σε δεδομένο φορτίο αναφοράς κατά την εκτέλεση των σειρών 1, 3, 5

3) **Απόκλιση του μηδενός**

$$f_o = \frac{i_f - i_o}{x_N} \times 100, \qquad (ΣΤ.IV.3)$$

όπου i_o και i_f οι ενδείξεις της υπό διακρίβωση συσκευής πριν από την εφαρμογή φορτίου και μετά από την απομάκρυνση του φορτίου αντίστοιχα και x_N η ένδειξη που αντιστοιχεί στη δυναμικότητα της συσκευής.

4) **Απόκλιση παρεμβολής**

$$f_c = \frac{\overline{x_r} - x_a}{x_a} \times 100, \qquad (ΣΤ.IV.4)$$

όπου x_a η υπολογιζόμενη από την εξίσωση τιμή.

5) **Υστέρηση**

$$u_1 = \left| \frac{x_4 - x_3}{x_3} \right| \times 100 \;,\quad u_2 = \left| \frac{x_6 - x_5}{x_5} \right| \times 100 \quad \text{και} \quad u = \frac{u_1 + u_2}{2}, \qquad (ΣΤ.IV.5)$$

3. Ισοζύγιο Αβεβαιοτήτων

Στον πίνακα IV.1 φαίνεται το ισοζύγιο αβεβαιοτήτων για τη διακρίβωση μετρητικών διατάξεων δύναμης, όπου οι επιμέρους τυπικές αβεβαιότητες είναι όλες τύπου Β και ισχύει για αυτές η υπόθεση πως οι βαθμοί ελευθερίας που αντιστοιχούν σε αυτές είναι άπειροι.

Πίνακας IV.1. Ισοζύγιο αβεβαιοτήτων

ΠΑ	ΕΔ	ΗΕΔ	ΚΠ	ΣΚ	ΣΤΑ	ΣΕ	ΣΣΣΑ
Αναπαραγωγισιμότητα χωρίς περιστροφή	b'	$\alpha_{b'}$=b'/2	Ορθ.	$1/\sqrt{3}$	$\alpha_{b'}/\sqrt{3}$	1	$w_{rep}=\alpha_{b'}/\sqrt{3}$
Αναπαραγωγισιμότητα με περιστροφή	b	α_b=b/2	U-κατ.	$1/\sqrt{2}$	$\alpha_b/\sqrt{2}$	1	$w_{rot}=\alpha_b/\sqrt{2}$
Απόκλιση του μηδενός	f_o	$\alpha_{fo}=f_o/2$	Ορθ.	$1/\sqrt{3}$	$\alpha_{fo}/\sqrt{3}$	1	$w_{zer}=\alpha_{fo}/\sqrt{3}$
Απόκλιση παρεμβολής	f_c	$\alpha_{fc}=f_c/2$	Τριγ.	$1/\sqrt{6}$	$\alpha_{fc}/\sqrt{6}$	1	$w_{inp}=\alpha_{fc}/\sqrt{6}$
Υστέρηση	u	α_u=u/2	Ορθ.	$1/\sqrt{3}$	$\alpha_u/\sqrt{3}$	1	$w_{rev}=\alpha_u/\sqrt{3}$
Διακριτική ικανότητα	r	α_r=r/2	Ορθ.	$1/\sqrt{3}$	$\alpha_r/\sqrt{3}$	1	$w_{res}=\alpha_r/\sqrt{3}$
Βέλτιστη μετρητική ικανότητα μηχανής	2•bmc	α_{bmc}=bmc	Καν.	1/2	$\alpha_{bmc}/2$	1	$w_{bmc}=\alpha_{bmc}/2$
Σχετική Συνδυασμένη Αβεβαιότητα (%)	$w_{tra}=\sqrt{w_{rep}^2+w_{rot}^2+w_{zer}^2+w_{inp}^2+w_{rev}^2+w_{res}^2+w_{bmc}^2}$						
Σχετική Διευρυμένη Αβεβαιότητα (%)	$W_{tra} = k \bullet w_{tra}$, k = 2						

ΠΑ = **Π**ηγή **Α**βεβαιότητας
ΕΔ = **Ε**ύρος **Δ**ιακύμανσης (%)
ΗΕΔ = **Ή**μισυ **Ε**ύρος **Δ**ιακύμανσης (%)
ΚΠ = **Κ**ατανομή **Π**ιθανότητας
ΣΚ = **Σ**υντελεστής **Κ**ατανομής
ΣΤΑ = **Σ**χετική **Τ**υπική **Α**βεβαιότητα (%)
ΣΕ = **Σ**υντελεστής **Ε**υαισθησίας
ΣΣΣΑ = **Σ**υνεισφορά στη **Σ**χετική **Σ**υνδυασμένη **Α**βεβαιότητα (%)

Στον πίνακα IV.2 εμφανίζεται ένα σετ τιμών που αντιστοιχεί σε ληφθείσες ενδείξεις μιας υπό διακρίβωση μετρητικής διάταξης δύναμης, κατά την εκτέλεση της διαδικασίας διακρίβωσης όπως αυτή περιγράφεται στο πρότυπο ISO 376: 1999.

Πίνακας IV.2. Ενδείξεις μετρητικής διάταξης δύναμης κατά την εκτέλεση της διαδικασίας διακρίβωσης σύμφωνα με το πρότυπο ISO 376: 1999.

ΔΥΝΑΜΗ ΑΝΑΦΟΡΑΣ		**ΠΡΟ-ΦΟΡΤΩΣΗ**		
		Ενδείξεις σε mV/V		
	1^{η} (0^{o})		**2^{η} (120^{o})**	**3^{η} (240^{o})**
0 kN	0,000000		0,000000	0,000000
100 kN	2,002356		2,002382	2,002332
0 kN	0,000188		0,000138	0,000138
	ΣΕΙΡΕΣ			
		Ενδείξεις σε mV/V		
	1^{η} (0^{o})	**2^{η} (0^{o})**	**3^{η} (120^{o})**	**5^{η} (240^{o})**
0 kN	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
10 kN	0,200194	0,200200	0,200200	0,200194
20 kN	0,400430	0,400434	0,400434	0,400420
30 kN	0,600658	0,600662	0,600656	0,600636
40 kN	0,800896	0,800902	0,800894	0,800866
50 kN	1,001136	1,001144	1,001128	1,001096
60 kN	1,201386	1,201392	1,201374	1,201336
70 kN	1,401646	1,401652	1,401632	1,401588
80 kN	1,601926	1,601928	1,601904	1,601860
90 kN	1,802216	1,802218	1,802198	1,802154
100 kN	2,002516	2,002522	2,002498	2,002450
			4^{η} (120^{o})	**6^{η} (240^{o})**
90 kN			1,802190	1,802144
80 kN			1,601870	1,601824
70 kN			1,401578	1,401538
60 kN			1,201328	1,201290
50 kN			1,001098	1,001064
40 kN			0,800878	0,800850
30 kN			0,600658	0,600636
20 kN			0,400448	0,400434
10 kN			0,200226	0,200220
0 kN	0,000136	0,000168	0,000014	0,000008

Οι υπολογισμοί για τον προσδιορισμό της αβεβαιότητας έχουν ως εξής:

Αρχικά υπολογίζονται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, οι συντελεστές του πολυωνύμου 3^{ου} βαθμού που περιγράφει καλύτερα τα πειραματικά σημεία (Ψ_i, $\overline{x_r}$) (όπου Ψ_i είναι οι τιμές της δύναμης αναφοράς σε kN, και $\overline{x_r}$ ο μέσος όρος των σειρών 1, 3, 5 σε mV/V). Για το συγκεκριμένο παράδειγμα το πολυώνυμο που προκύπτει από το fitting είναι:

$$x_\alpha\ [mV/V] = 2{,}002084 * 10^{-2} * \Psi + 1{,}982771 * 10^{-8} * \Psi^2 + 2{,}049199 * 10^{-10} * \Psi^3$$

Το πολυώνυμο αυτό αποτελεί τη βάση, τόσο για την παρεμβολή τιμών (για σημεία ενδιαμέσως των πειραματικών) όσο και για τον υπολογισμό της απόκλισης παρεμβολής όπως ορίζεται από την εξίσωση (ΣΤ.IV.4) (θέτοντας όπου Ψ τις τιμές Ψ_i). Στη συνέχεια υπολογίζονται τα εύρη των μετρητικών παραμέτρων όπως φαίνεται στον πίνακα IV.3, με βάση τις εξισώσεις (ΣΤ.IV.1) έως (ΣΤ.IV.5).

Πίνακας IV.3. Εύρος διακύμανσης μετρητικών παραμέτρων.

Ονομαστική Δύναμη [kN]	b' [%]	b [%]	f_o [%]	f_c [%]	u [%]	d [%]
10 kN	0,003	0,003	0,008	0,007	0,013	0,00050
20 kN	0,001	0,003	0,008	0,000	0,003	0,00025
30 kN	0,001	0,004	0,008	0,000	0,000	0,00017
40 kN	0,001	0,004	0,008	-0,001	0,002	0,00013
50 kN	0,001	0,004	0,008	0,000	0,003	0,00010
60 kN	0,000	0,004	0,008	0,000	0,004	0,00008
70 kN	0,000	0,004	0,008	0,000	0,004	0,00007
80 kN	0,000	0,004	0,008	0,000	0,002	0,00006
90 kN	0,000	0,003	0,008	0,000	0,000	0,00006
100 kN	0,000	0,003	0,008	0,000		0,00005

Το ισοζύγιο της αβεβαιότητας καταρτίζεται για κάθε τιμή δύναμης αναφοράς ξεχωριστά. Για παράδειγμα για τη δύναμη αναφοράς των 40 kN έχει ως ακολούθως:

Πίνακας IV.4. Ισοζύγιο αβεβαιότητας για δύναμη αναφοράς 40 kN

ΠΑ	**ΕΔ (%)**	**ΗΕΔ (%)**	**ΚΠ**	**ΣΚ**	**ΣΤΑ (%)**	**ΣΕ**	**ΣΣΣΑ (%)**
Αναπαραγωγισιμότητα χωρίς περιστροφή, w_{rep}	0,001	0,0005	Ορθ.	$1/\sqrt{3}$	0,0003	1	0,0003
Αναπαραγωγισιμότητα με περιστροφή, w_{rot}	0,004	0,002	U-κατ.	$1/\sqrt{2}$	0,0014	1	0,0014
Απόκλιση του μηδενός, w_{zer}	0,008	0,004	Ορθ.	$1/\sqrt{3}$	0,0023	1	0,0023
Απόκλιση παρεμβολής, w_{inp}	0,001	0,0005	Τριγ.	$1/\sqrt{6}$	0,0002	1	0,0002
Υστέρηση, w_{rev}	0,002	0,001	Ορθ.	$1/\sqrt{3}$	0,0006	1	0,0006
Διακριτική ικανότητα, w_{res}	0,000	0,000	Ορθ.	$1/\sqrt{3}$	0	1	0
Βέλτιστη μετρητική ικανότητα μηχανής, w_{bmc}	0,004	0,002	Καν.	1/2	0,0010	1	0,0010
Σχετική Συνδυασμένη Αβεβαιότητα (%)	$w_{tra}=\sqrt{0{,}0003^2+0{,}0014^2+0{,}0023^2+0{,}0002^2+0{,}0006^2+0^2+0{,}001^2}=0{,}003$						
Σχετική Διευρυμένη Αβεβαιότητα (%)	$W_{tra} = k \bullet 0{,}003 = 0{,}006$, $k = 2$						

Στον πίνακα IV.5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των υπολογισμών για την αβεβαιότητα του αισθητηρίου δύναμης του παραδείγματος, που αντιστοιχεί σε κάθε τιμή δύναμης αναφοράς.

Πίνακας IV.5. Σχετική διευρυμένη αβεβαιότητα του αισθητηρίου δύναμης του παραδείγματος

Ονομαστική Δύναμη [kN]	W_{tra} [%]
10 kN	0,010
20 kN	0,006
30 kN	0,006
40 kN	0,006
50 kN	0,006
60 kN	0,006
70 kN	0,006
80 kN	0,006
90 kN	0,006
100 kN	0,006

V. Μάζα - Διακρίβωση προτύπων βαρών

1. Περιγραφή

Η μέτρηση της μάζας ενός πρότυπου βάρους προϋποθέτει την χρήση:

α) κατάλληλου πρότυπου βάρους ή συνδυασμό προτύπων βαρών αναφοράς, όπου «κατάλληλο» σημαίνει είτε καλύτερης τάξης ακρίβειας ή αβεβαιότητα 3 φορές μικρότερη από το πρότυπο βάρος που μετράται.

β) ζυγού - συγκριτή με γνωστά χαρακτηριστικά όπως γραμμικότητα, ευαισθησία και επαναληψιμότητα. Λόγω της σταθερότητας, ακρίβειας και σχετικά χαμηλής τιμής είναι διαδεδομένη η χρήση ηλεκτρονικών ζυγών πλέον στα εργαστήρια διακριβώσεων και παρακάτω όποια αναφορά γίνεται σε ζυγούς είναι σε αυτού του είδους.

Για την διακρίβωση χρησιμοποιείται η μέθοδος της ζύγισης με αντικατάσταση (substitution weighing), ήτοι ζυγίζονται κατά σειρά το πρότυπο αναφοράς (R) και το πρότυπο δοκιμής (T). Για τις μετρήσεις χρησιμοποιούνται κύκλοι ζύγισης RTTR (διπλή αντικατάσταση) ή RTR (απλή αντικατάσταση). Η μέθοδος αυτή αναιρεί την γραμμική ολίσθηση με την προϋπόθεση ότι το χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών ζυγίσεων είναι σταθερό. Το είδος του κύκλου ζύγισης και ο ελάχιστος αριθμός των κύκλων εξαρτάται από την επιδιωκόμενη ακρίβεια της διακρίβωσης.

2. Υπολογισμοί

Η συγκριτική ζύγιση έχει ως σκοπό τον προσδιορισμό της μάζας ενός αντικειμένου (π.χ. πρότυπου βάρους) από την μάζα γνωστού προτύπου βάρους αναφοράς και την διαφορά ένδειξης του ζυγού που χρησιμοποιείται. Η σύγκριση των δυνάμεων που ασκούνται στον ζυγό από το αντικείμενο και το πρότυπο αναφοράς έχει ως αποτέλεσμα την ύπαρξη μιας διαφοράς δύναμης $\Delta m_w \cdot g$ που δίνεται από την σχέση

$$[m_x(1-\rho_a/\rho_x) - m_s(1-\rho_a/\rho_s)]\cdot g = \Delta m_w \cdot g \qquad (\Sigma T.V.1)$$

Από την παραπάνω προκύπτει η μάζα του αντικειμένου ως

$$m_x = m_s\left(\frac{1-\rho_a/\rho_s}{1-\rho_a/\rho_x}\right) + \frac{\Delta m_w}{1-\rho_a/\rho_x} \qquad (\Sigma T.V.2)$$

η οποία με χρήση της ευαισθησίας S του ζυγού γράφεται

$$m_x = m_s\left(\frac{1-\rho_a/\rho_s}{1-\rho_a/\rho_x}\right) + \frac{\Delta I_w}{S\cdot(1-\rho_a/\rho_x)} \qquad (\Sigma T.V.3)$$

όπου η ευαισθησία S δίνεται από την σχέση

$$S = \frac{(t_n+z)+(r_n+z)-t_{n-1}-r_{n+1}}{2\,m_z(1-\rho_a/\rho_z)} \qquad (\Sigma T.V.4)$$

όπου κατά τον τελευταίο κύκλο μιας ακολουθίας ζύγισης παρεμβλήθηκε και το βάρος ευαισθησίας z ώστε αυτή να γράφεται ενδεικτικά $r_{n-1}t_{n-1}(t_n+z)(r_n+z)r_{n+1}$.

Κάνοντας πράξεις στον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της σχέσης (ΣΤ.V.3) και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\rho_a << \rho_x$ προκύπτει ότι

$$m_x = m_s\left(1+\frac{\rho_a(\rho_s-\rho_x)}{\rho_s\rho_x}\right)+\frac{\Delta I_W}{S\cdot\left(1-\rho_a/\rho_x\right)} \qquad (\Sigma T.V.5)$$

Ο όρος $\frac{\rho_a(\rho_s-\rho_x)}{\rho_s\rho_x}$ συνήθως συμβολίζεται με **B** και αποτελεί την λεγόμενη διόρθωση λόγω άνωσης του αέρα. Η σχέση ((ΣΤ.V.5)) είναι η θεμελιώδης εξίσωση της συγκριτικής ζύγισης. Η τελική επιλογή της χρήσης διόρθωσης λόγω άνωσης και μετατροπής της διαφοράς ένδειξης σε διαφορά μάζας στην εξίσωση ζύγισης εξαρτάται βέβαια από τις απαιτήσεις της μεθόδου σε κάθε περίπτωση.

3. Ισοζύγιο Αβεβαιοτήτων

Ο υπολογισμός των αβεβαιοτήτων ακολουθεί την μεθοδολογία που παρουσιάζεται στο "GUIDE TO THE EXPRESSION OF UNCERTAINTY IN MEASUREMENTS" (1995) Για την εκτίμηση της συνδυασμένης τυπικής αβεβαιότητας $u_{comb}(m_t)$ της μάζας του προτύπου δοκιμής, λαμβάνεται υπόψη η συνεισφορά όλων των παραγόντων που επιδρούν στην μέτρηση και οι αβεβαιότητές τους ταξινομούνται σε τύπου Α και Β. Οι πηγές της αβεβαιότητας της μάζας του προτύπου δοκιμής και αναλυτικές εκφράσεις των εκτιμήσεων των συνιστωσών της δίνονται παρακάτω

1. **Διαδικασία Ζύγισης**

$$u_W(\Delta\overline{m}) = \frac{s[\Delta m(\nu)]}{\sqrt{\nu}} \qquad \text{(ΤΥΠΟΥ Α)} \qquad (\Sigma T.V.6)$$

όπου ν ο αριθμός κύκλων ζύγισης και s[Δm(ν)] η τυπική απόκλιση των ν διαφορών μάζας Δm(i).

2. **Πρότυπο Αναφοράς**

$$u(m_r) = \frac{U(m_r)}{k} \qquad \text{(ΤΥΠΟΥ Β)} \qquad (\Sigma T.V.7)$$

όπου $U(m_r)$ η διευρυμένη αβεβαιότητα του προτύπου αναφοράς, και k ο συντελεστής κάλυψης, όπως αναγράφονται στο πιστοποιητικό διακρίβωσής του. Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται περισσότερα του ενός πρότυπα αναφοράς τότε η συνολική τους αβεβαιότητα θα είναι: $u(m_r) = \sum_i u(m_{ri})$ όπου $u(m_{ri})$ η τυπική αβεβαιότητα του προτύπου αναφοράς i.

3. **Διόρθωση Άνωσης**

$$u_{buoy}(\Delta\overline{m}) = m_r\cdot\left\{\left(\frac{\rho_r-\rho_t}{\rho_r\rho_t}\right)^2\cdot u^2(\rho_a)+\left(\frac{\rho_a}{\rho_t^2}\right)^2\cdot u^2(\rho_t)\right\}^{1/2} \qquad \text{(ΤΥΠΟΥ Β)} \qquad (\Sigma T.V.8)$$

Στην παραπάνω σχέση έγινε η παραδοχή ότι $u(\rho_r) << u(\rho_t)$, όπου οι όροι $u(\rho_a)$ και $u(\rho_t)$ είναι οι τυπικές αβεβαιότητες της πυκνότητας του αέρα και του προτύπου δοκιμής, αντίστοιχα.

4. **Συγκριτικός Ζυγός**

$$u_{bal}(\Delta\overline{m}) = \sqrt{\left(u_s^2(\Delta\overline{m})+u_d^2(\Delta\overline{m})+u_e^2(\Delta\overline{m})\right)} \qquad \text{(ΤΥΠΟΥ Β)} \qquad (\Sigma T.V.9)$$

όπου

- u_s είναι η αβεβαιότητα της ευαισθησίας του ζυγού και δίνεται από την σχέση

$$u_S = \Delta m_W \cdot \left\{ \left(\frac{u(\Delta I_z)}{\Delta I_z}\right)^2 + \left(\frac{u(m_z)}{m_z}\right)^2 \right\}^{1/2}$$

  με ΔI_z την μεταβολή της ένδειξης του ζυγού λόγω του βάρους ευαισθησίας, $u(\Delta I_z)$ την αβεβαιότητα της ΔI_z, $u(m_z)$ την αβεβαιότητα του βάρους ευαισθησίας και m_z την μάζα του.

- u_d η συνεισφορά στην αβεβαιότητα λόγω διακριτικής ικανότητας του ζυγού και δίνεται από

$$u_d = \left(\frac{d/2}{\sqrt{3}}\right) \times \sqrt{2}$$

  με d την μικρότερη ψηφιακή υποδιαίρεση της κλίμακάς του.

- u_E η συνεισφορά στην αβεβαιότητα λόγω έκκεντρης φόρτισης του ζυγού και δίνεται από

$$u_E = \frac{\frac{d_1}{d_2} \times \Delta}{2 \times \sqrt{3}}$$

  με Δ την διαφορά μεταξύ μέγιστης και ελάχιστης τιμής από τον έλεγχο της έκκεντρης φόρτωσης, d_1 την κατά προσέγγιση απόσταση μεταξύ των κέντρων των βαρών και d_2 την απόσταση από το κέντρο του υποδοχέα του βάρους ως μία γωνία του.

Θεωρώντας ότι οι τυπικές αβεβαιότητες των παραγόντων που επιδρούν είναι ανεξάρτητες (μη συσχετιζόμενες), η συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα υπολογίζεται από την σχέση

$$u_{comb}(m_t) = \sqrt{\left(u_w^2(\Delta\overline{m}) + u^2(m_r) + u_{buoy}^2(\Delta\overline{m}) + u_{bal}^2(\Delta\overline{m})\right)} \qquad (\Sigma T.V.10)$$

Παρακάτω παρουσιάζεται ένα αριθμητικό παράδειγμα της διακρίβωσης προτύπου βάρους σχήματος OIML ονομαστικής τιμής μάζας 1 000 g. Το υλικό κατασκευής του βάρους είναι ανοξείδωτος χάλυβας άγνωστης προελεύσεως οπότε η πυκνότητά του και η αβεβαιότητα που την συνοδεύει εκτιμάται ως ρ_t = 7 950 ± 140 kg/m^3.

Το πρότυπο αναφοράς που χρησιμοποιείται για την συγκριτική ζύγιση έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά, όπως προκύπτουν από το πιστοποιητικό διακρίβωσής του:

- συμβατική τιμή μάζας m_{cr}= 1 000 g + 2 mg ή μάζας m_r = 1 000 g + 3 mg
- διευρυμένη αβεβαιότητα $U(m_{cr})$= 1,5 mg (k=2)
- τυπική αβεβαιότητα $u(m_{cr})$= 0,75 mg
- πυκνότητα ρ_r= 7 900 kg/m^3
- αβεβαιότητα $u(\rho_r)$= 25 kg/m^3

Κατά την διάρκεια της διαδικασίας διακρίβωσης οι περιβαλλοντικές συνθήκες στο εργαστήριο ήταν: ατμοσφαιρική πίεση p 1015,2 ± 0,3 hPa, σχετική υγρασία h 51,2 ± 1,0 % και θερμοκρασία t 23,2 ± 0,2^o C. Η πυκνότητα του αέρα υπολογίστηκε ως ρ_a = 1,1872 kg/m^3 και η τυπική αβεβαιότητα ως $u(\rho_a)$ = 0,0008 kg/m^3.

Για την διακρίβωση του ανωτέρω βάρους χρησιμοποιείται ζυγός με μέγιστη δυναμικότητα 1 100 g και διακριτότητας d = 0,1 mg. Εκτελούνται τέσσερις κύκλοι ζυγίσεων RTTR και τα αποτελέσματα δίνονται στον πίνακα V.1

Πίνακας V.1. Αποτελέσματα κύκλων συγκριτικής ζύγισης με χρήση βάρους ευαισθησίας

	ΕΝΔΕΙΞΕΙΣ σε (g)			
Ζύγιση	**Κύκλος 1**	**Κύκλος 2**	**Κύκλος 3**	**Κύκλος 4**
Πρότυπο αναφοράς	r_{11}=1 000,0025	r_{21}=1 000,0021	r_{31}=1 000,0024	r_{41}=1 000,0019
Προς διακρίβωση	t_{11}=1 000,0087	t_{21}=1 000,0081	t_{31}=1 000,0083	t_{41}=1 000,0078
Προς διακρίβωση	t_{12}=1 000,0085	t_{22}=1 000,0080	t_{32}=1 000,0081	--
Προς διακρίβωση + z	--	--	--	t_{4z}=1 000,0173
Πρότυπο αναφοράς +z	--	--	--	r_{4z}=1 000,0119
Πρότυπο αναφοράς	r_{12}=1 000,0021	r_{22}=1 000,0022	r_{32}=1 000,0022	r_{42}=1 000,0021

Στον πίνακα V.2 παρουσιάζεται το ισοζύγιο αβεβαιοτήτων για το συγκεκριμένο παράδειγμα.

Πίνακας V.2. Ισοζύγιο αβεβαιοτήτων διακρίβωσης πρότυπου βάρους

Μέγεθος X_i	*Εκτίμηση* x_i	*Αβεβαιότητα* u_i	*Κατανομή*	*Τυπική Αβεβαιότητα* $u(x_i)$	*Συντ. Ευαισθησίας*	*Συνεισφορά* $u_i(y)$
$\Delta\overline{m}_w$	0,0061 g	0, 11 mg	Κανονική	0, 11 mg	1	0,0121
m_r	1 000,003 g	1,5 mg	Κανονική	0,75 mg	1	0,562
$m_r \cdot B$	-0,0009 g	0,47 mg	Κανονική	0,47 mg	1	0,221
Συγκριτής		0,33 mg	Κανονική	0,33 mg	1	0,109
d	0,000	0,07 mg	Ορθ.	0,04		
ΔΕ	0,004	0,55 mg	Ορθ.	0,32 mg		
S	0,9646	0,06 mg	Κανονική	0,06 mg		
Συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα		$u_{comb}(m) = \sqrt{0{,}0121^2 + 0{,}562^2 + 0{,}221^2 + 0{,}109^2} = 0{,}89\text{mg}$				
Διευρυμένη αβεβαιότητα		$U(m_t) = k \cdot u_{comb}(m)$ = 1,7 9 mg, k = 2				

Η μάζα του διακριβωμένου πλέον πρότυπου βάρους εκφράζεται ως:

$$\boxed{m = 1000{,}0082 \text{ g} \pm 1{,}7\,9 \text{ mg}}$$