

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΔΙΑΚΡΙΒΩΣΗΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΓΩΝΙΑΣ ΣΤΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΜΕΤΡΟΛΟΓΙΑΣ

Χρήστος Μπαντής, Ιωάννης Κουρούπας
Ελληνικό Ινστιτούτο Μετρολογίας
Βιομηχανική Περιοχή Θεσσαλονίκης, Οικ. Τετρ. 45
57022 Σίνδος, Θεσσαλονίκη
e-mail: bandis@eim.org.gr

Για την υλοποίηση επίπεδης γωνίας δεν απαιτείται κάποιο πρωτεύον πρότυπο. Οποιαδήποτε γωνία μπορεί να υλοποιηθεί ως επίκεντρη γωνία ενός κατάλληλα διαιρεμένου κυκλικού δίσκου. Η προς διακρίβωση γωνία συγκρίνεται με όλες τις γωνίες του κατάλληλα διαιρεμένου κύκλου. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το άθροισμα όλων αυτών των επίκεντρων γωνιών σε ένα επίπεδο ισούται με 2π rad (360°) και εφαρμόζοντας τεχνικές σύγκρισης (self calibration – cross calibration techniques), μπορούμε να διακριβώσουμε πρότυπα επίπεδης γωνίας όπως οπτικά πολύγωνα, πλακίδια γωνίας, γωνιακές τράπεζες και angle encoders. Στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τις τεχνικές αυτές, όπως εφαρμόζονται στο εργαστήριο διαστατικών του Ελληνικού Ινστιτούτου Μετρολογίας.

Λέξεις-Κλειδιά: Διακρίβωση γωνίας, οπτικά πολύγωνα, πλακίδια γωνίας.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Για μετρήσεις μήκους είναι απαραίτητο να έχουμε ιχνηλασιμότητα στο πρωτεύον πρότυπο του μήκους που υλοποιεί τον ορισμό της μονάδας (πρότυπα laser He-Ne σταθεροποιημένα ως προς την συχνότητα με ατμούς ιωδίου). Η σύνδεση του άυλου ορισμού του μέτρου, όπως προκύπτει από το πρωτεύον πρότυπο, με φυσικά αντικείμενα (πρότυπα πλακίδια μήκους), πραγματοποιείται με διατάξεις συμβολής φωτός. Για την υλοποίηση επίπεδης γωνίας δεν απαιτείται κάποιο πρωτεύον πρότυπο. Οποιαδήποτε γωνία μπορεί να υλοποιηθεί ως επίκεντρη γωνία ενός κατάλληλα διαιρεμένου κυκλικού δίσκου. Συνεπώς η διακρίβωση προτύπων γωνίας βασίζεται στην ακρίβεια με την οποία μπορούμε να διαιρέσουμε έναν κύκλο και όχι στην κατοχή ή υλοποίηση κάποιου πρωτεύοντος πρότυπου.

1.2 Οι μονάδες

Στο Διεθνές Σύστημα, (S.I.) είναι αποδεκτές δύο μονάδες για την επίπεδη γωνία¹.

- Το ακτίνιο (rad), που κατατάσσεται στις συμπληρωματικές μονάδες και ορίζεται ως εκείνη η επίπεδη γωνία η οποία όταν γίνει επίκεντρη ορίζει τόξο, σε οποιοδήποτε κύκλο, με μήκος ίσο με την ακτίνα του.
- Η μοίρα (degree), που κατατάσσεται στις αποδεκτές λόγω της ευρείας χρήσης τους, μονάδες εκτός S.I., όπου από την εποχή των Βαβυλωνίων έχουμε τον ορισμό της ως το 1/360 του κύκλου και αντιστοιχεί σε μονάδες του S.I. με $(\pi/180)$ rad.

Το ακτίνιο υιοθετήθηκε προκειμένου να απλοποιηθεί μαθηματικές εκφράσεις παραγόμενων φυσικών μεγεθών (όπως η κεντρομόλος επιτάχυνση). Προέρχεται από την θεώρηση του μεγέθους της γωνίας, όπως αυτή χρησιμοποιείται σε θεωρητικούς υπολογισμούς και μαθηματικές μεθόδους, δηλαδή, ως μέρος ενός κύκλου. Σύμφωνα με αυτήν, η γωνία ορίζεται ως ο λόγος ενός τόξου κύκλου ακτίνας ρ προς την ακτίνα αυτή. Δεδομένου ότι ο λόγος της περιφέρειας ενός κύκλου προς την διάμετρο του είναι πάντα ίσος με π , ένας κύκλος θα έχει πάντα 2π radians. Ως μονάδα του S.I. είναι αδιάστατη ($m/m=1$), δύσκολο να υλοποιηθεί πειραματικά και δεν χρησιμοποιείται για την έκφραση αποτελεσμάτων μετρήσεων γωνίας.

Στην καθημερινή πρακτική, χρησιμοποιείται η μοίρα (degree) και οι υποδιαιρέσεις της σύμφωνα με το εξηγητικό σύστημα ($1^\circ = 60' = 3600''$). Ορίστηκε πρώτη φορά από τους Βαβυλώνιους αστρονόμους², οι οποίοι, προκειμένου να εκφράσουν την διαφορά κατεύθυνσης μεταξύ 'σημείων' (αστρών) στον ουρανό όπως αυτά παρατηρούνταν από την γη, διαίρεσαν τον ουράνιο κύκλο σε 360 ίσους τομείς και όρισαν την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία του κάθε τομέα ως 1 μοίρα.

1.3 Τα πρότυπα

Τα πρότυπα αναφοράς και εργασίας που χρησιμοποιούνται συνήθως είναι³:

- Indexing table.

Πρόκειται για έναν πρότυπο οδοντωτό κυκλικό διαιρέτη ο οποίος βασίζεται σε δύο βαθμονομημένα οδοντωτά πιάτα ($0^\circ \sim 360^\circ$) με δόντια ομοίου σχήματος και ίδιου βήματος τα οποία εμπλέκονται. Στο πιο διαδεδομένο, το Moore 1440, τα οδοντωτά πιάτα μπορούν να εμπλακούν μεταξύ τους σε 1440 διαφορετικές θέσεις και συνεπώς να δημιουργήσουν μεταξύ τους οποιαδήποτε γωνία πολλαπλάσια της διακριτικής του ικανότητας των $15'$ ($0,25^\circ$) με επαναληψιμότητα $0,2''$. Είναι πρότυπο πολύ μεγάλης ακρίβειας αλλά και δύσκολο να αυτοματοποιηθεί.

- Angle encoder γωνιακής τράπεζας.

Σύγχρονοι angle encoders τοποθετούνται σε γωνιακές τράπεζες και σε συνδυασμό με AWE (asymptotic waveform evaluation) interpolator και μετρητικές κάρτες ανάγνωσης μέσω H/Y, δημιουργούν ένα πρότυπο υψηλής ακρίβειας, εύκολο να αυτοματοποιηθεί. Ο πιο διαδεδομένος, ο RON 905 σε συνδυασμό με τον AWE 1024 interpolator και την μετρητική κάρτα IK 220 της Heindenhain έχει διακριτική ικανότητα $0,1''$ ($0,00001^\circ$) και επαναληψιμότητα $\pm 0,2''$.

- Οπτικά πολύγωνα.

Από τα πιο διαδεδομένα μεταφερόμενα πρότυπα υψηλής ακρίβειας. Πρόκειται για κανονικά πολύγωνα κατασκευασμένα από ατσάλι ή γυαλί με οπτικά ανακλαστικές επίπεδες πλευρές. Συνήθως έχουν 6, 8 ή 12 πλευρές αλλά μπορούν να κατασκευαστούν έως και 72. Η ακρίβεια τους εξαρτάται σημαντικά από την επιπεδότητα των ανακλαστικών τους πλευρών.

- Πλακίδια γωνίας.

Ατσάλινα πλακίδια των οποίων οι δύο επεξεργασμένες πλευρές, δημιουργούν μεταξύ τους μία ονομαστική γωνία. Δίνονται συνήθως σε σετ που περιλαμβάνουν μία σειρά από πλακίδια διαφορετικών ονομαστικών γωνιών και ένα τετράγωνο. Συνδυάζοντας τα μπορούμε να δημιουργήσουμε οποιαδήποτε γωνία με βήμα $1,5'$.

1.4 Όργανα μέτρησης μικρών γωνιών

Για πρακτικές μετρήσεις μικρών γωνιών χρησιμοποιούνται συνήθως τα παρακάτω όργανα:

- Αλφάδια ακριβείας: Χρησιμοποιούνται για μετρήσεις ακριβείας μικρών γωνιών κλίσης στο οριζόντιο ή κατακόρυφο επίπεδο. Μπορεί να είναι συμβατικά φυσαλίδας ή ηλεκτρονικού τύπου.
- Autocollimators: οπτικά όργανα ικανά να μετρήσουν μικρές γωνίες κλίσης ανακλαστικών επιφανειών. Οι σύγχρονοι autocollimators είναι φωτοηλεκτρικού τύπου με ηλεκτρονική ανάγνωση, διακριτικής ικανότητας έως και $0,005''$ με ακρίβεια $0,02''$.

1.5 Μέθοδοι διακρίβωσης προτύπων γωνίας.

Τα πρότυπα γωνίας μπορούν να διακριβωθούν με τεχνικές που βασίζονται:

1) στην θεμελιώδη μέθοδο διαίρεσης του κύκλου⁴.

Οι τεχνικές αυτές χρησιμοποιούν την περάτωση του κύκλου, δηλαδή το γεγονός ότι το άθροισμα όλων των επίκεντρων γωνιών σε έναν πλήρη κύκλο ισούται με 360° (2π rad). Εφαρμόζοντας μαθηματικές μεθόδους διαίρεσης κύκλου (simple closure, dual closure) που ανήκουν στο ευρύτερο πλαίσιο των τεχνικών που χρησιμοποιούν error reversal, error separation και redundancy είναι δυνατή η ολοκλήρωση της διαδικασίας διακρίβωσης – υλοποίησης, χωρίς αναφορά σε κάποιο άλλο διακριβωμένο πρότυπο ή μέγεθος.

2) σε αρχές της τριγωνομετρίας (sin, tan).

Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, η γωνία υπολογίζεται από δύο γνωστά μήκη κάνοντας χρήση των τριγωνομετρικών αριθμών (συνήθως ημίτονο ή εφαπτομένη). Θεωρείται μέθοδος μεγάλης ακρίβειας για μικρές γωνίες, ειδικά μικρότερες της 1° , ενώ προτείνεται για γωνίες έως 45° .

3) σε απευθείας σύγκριση.

Κατά την μέθοδο αυτήν η προς διακρίβωση γωνία συγκρίνεται απευθείας με μία άλλη διακριβωμένη γωνία αναφοράς. Η διαδικασία είναι πολύ σύντομη αλλά και μικρότερης ακρίβειας,

Η επιλογή της μεθόδου, εξαρτάται από τον διαθέσιμο εξοπλισμό αλλά και την ακρίβεια που απαιτείται.

Στο Ε.Ι.Μ χρησιμοποιούνται σήμερα τεχνικές που βασίζονται στην θεμελιώδη μέθοδο διαίρεσης του κύκλου και την απευθείας σύγκριση, όπως αυτές περιγράφονται στην συνέχεια.

2. **Θεμελιώδης μέθοδος διαίρεσης του κύκλου.**

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν κυκλικό δίσκο διαιρεμένο σε 4 ονομαστικά ίσες μεταξύ τους επίκεντρες γωνίες Α, Β, Γ, Δ και η κάθε μία έχει μία πολύ μικρή απόκλιση από την ονομαστική της τιμή α, β, γ και δ αντίστοιχα. Αυτές οι αποκλίσεις μπορούν να προσδιοριστούν αν συγκρίνουμε διαδοχικά την γωνία Α με τις υπόλοιπες γωνίες και καταγράψουμε τις διαφορές τους x_1, x_2, x_3, x_4 . Έτσι έχουμε ένα σύστημα 3 εξισώσεων με 4 αγνώστους :

$$\alpha - \beta = x_1, \quad \alpha - \gamma = x_2, \quad \alpha - \delta = x_3$$

Το γεγονός ότι το άθροισμα όλων των επίκεντρων γωνιών σε ένα κύκλο ισούται με 360° και επομένως το άθροισμα των αποκλίσεων τους από την ονομαστική τους τιμή ισούται με μηδέν, μας δίνει την τέταρτη εξίσωση που χρειαζόμαστε:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε προσδιορίσει όλες τις ζητούμενες αποκλίσεις:

$$\alpha = (x_1 + x_2 + x_3) / 4, \quad \beta = \alpha - x_1, \quad \gamma = \alpha - x_2, \quad \delta = \alpha - x_3$$

2.1 **Μαθηματικοί μέθοδοι διαίρεσης του κύκλου.**

Οι μαθηματικοί μέθοδοι που συνήθως χρησιμοποιούνται είναι⁴:

Απλή περάτωση κύκλου (Simple closure):

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο διαιρεμένο σε n ίσους μεταξύ τους τομείς με γωνίες A_1, A_2, \dots, A_n , και μία άγνωστη γωνία αναφοράς X. Όλες οι γωνίες έχουν ονομαστική τιμή $2\pi/n$ και οι αποκλίσεις τους από αυτήν είναι αντίστοιχα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ και x. Δηλαδή έχουμε:

$$A_i = 2\pi/n + \alpha_i, \quad \text{και} \quad X = 2\pi/n + x \quad \text{όπου} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Αν συγκρίνουμε διαδοχικά τις γωνίες του κύκλου A_i με την γωνία X θα έχουμε :

$$A_i - X = \alpha_i - x = m_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad \text{όπου} \quad m_i : \text{γωνία που μπορούμε να προσδιορίσουμε (πειραματικά με μέτρηση).}$$

δηλαδή ένα σύνολο n γραμμικών εξισώσεων με $n+1$ αγνώστους

$$\begin{aligned} \alpha_1 - x &= m_1 \\ \alpha_2 - x &= m_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \alpha_n - x &= m_n \end{aligned} \quad (2)$$

Η περάτωση του κύκλου μας δίνει μία επιπλέον εξίσωση.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n A_i &= 2\pi \\ \sum_{i=1}^n (2\pi/n + \alpha_i) &= \\ n(2\pi/n) + \sum_{i=1}^n \alpha_i &= \\ 2\pi + \sum_{i=1}^n \alpha_i &= \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

δηλαδή, εφόσον το άθροισμα όλων των επίκεντρων γωνιών σε ένα κύκλο ισούται με 2π (360°), το άθροισμα των αποκλίσεων τους από την ονομαστική τους τιμή θα ισούται με μηδέν.

Από τις (2) και (3) έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i - nx &= \sum_{i=1}^n m_i \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i \quad (4)$$

Έχοντας προσδιορίσει την απόκλιση x μπορούμε από το σύστημα (2) αναγωγικά να προσδιορίσουμε τις αποκλίσεις α_i . Η απόκλιση γωνίας A_k θα είναι:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= m_k + x \\ &= m_k - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i \\ &= m_k - \frac{m_k}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i \neq k} m_i \\ &= \left(\frac{n-1}{n} \right) m_k - \frac{1}{n} \sum_{i \neq k} m_i \end{aligned} \quad (5)$$

Διπλή περάτωση (Dual closure) :

Ας θεωρήσουμε δύο κύκλους διαιρεμένους σε n ίσους μεταξύ τους τομείς με γωνίες A_1, A_2, \dots, A_n και B_1, B_2, \dots, B_n . Όλες οι γωνίες έχουν ονομαστική τιμή $2\pi/n$ και οι αποκλίσεις τους από αυτήν είναι αντίστοιχα $a_1 a_2 \dots a_n$ και $b_1 b_2 \dots b_n$. Δηλαδή έχουμε:

$$\begin{aligned} A_i &= 2\pi/n + a_i, \\ B_k &= 2\pi/n + b_k \end{aligned} \quad \text{όπου } i, k=1, 2, \dots, n \quad (6)$$

Αν συγκρίνουμε διαδοχικά όλες τις γωνίες του πρώτου κύκλου A_i με όλες τις γωνίες του κύκλου δευτέρου B_k θα έχουμε :

$$A_i - B_k = a_i - b_k = m_{ik}, \quad \text{όπου } m_{ik} : \text{γωνία που μπορούμε να προσδιορίσουμε (πειραματικά με μέτρηση).}$$

δηλαδή ένα σύνολο $n \times n$ γραμμικών εξισώσεων της μορφής $a_i - b_k = m_{ik}$ (7) με $2n$ αγνώστους .

Οι περιορισμοί που θέτουν οι περατώσεις των κύκλων μας δίνουν δύο επιπλέον εξισώσεις :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n A_i &= 2\pi & \sum_{k=1}^n B_k &= 2\pi \\ \sum_{i=1}^n (2\pi/n + a_i) &= & \sum_{k=1}^n (2\pi/n + b_k) &= \\ n(2\pi/n) + \sum_{i=1}^n a_i &= & n(2\pi/n) + \sum_{k=1}^n b_k &= \\ 2\pi + \sum_{i=1}^n a_i &= & 2\pi + \sum_{k=1}^n b_k &= \\ \sum_{i=1}^n a_i &= 0 & \sum_{k=1}^n b_k &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

δηλαδή, εφόσον το άθροισμα όλων των επίκεντρων γωνιών σε ένα κύκλο ισούται με 2π (360°), το άθροισμα των αποκλίσεων τους από την ονομαστική τους τιμή θα ισούται με μηδέν.

Έτσι καταλήγουμε σε ένα σύστημα n^2+2 εξισώσεων με $2n$ αγνώστους. Εκφραζόμενο σε μορφή πίνακα θα είναι :

$$Ax=m$$

όπου : A ένας (n^2+2) επι ($2n$) πίνακας συντελεστών ,

x ένας ($2n$) επι 1 πίνακας στήλης που περιέχει τις άγνωστες αποκλίσεις των γωνιών a_i, b_k , και

m ένας (n^2+2) επι 1 πίνακας στήλης που περιέχει τα αποτελέσματα των συγκρίσεων μεταξύ των αποκλίσεων των γωνιών a_i, b_k και τους περιορισμούς των περατώσεων των κύκλων.

Οι τιμές του πίνακα m πρακτικά προσδιορίζονται με πειραματικές μετρήσεις. Λόγω των πειραματικών σφαλμάτων που αναπόφευκτα παρουσιάζουν οι πειραματικές μετρήσεις, ένα τέτοιο σύστημα, με περισσότερες εξισώσεις από αγνώστους είναι συνήθως ασυμβίβαστο, δηλαδή δεν έχει λύση που να ικανοποιεί όλες τις εξισώσεις ταυτόχρονα.

Ο τρόπος λύσης που μας δίνεται στην γραμμική άλγεβρα, είναι στην λογική της καλύτερης προσαρμογής στα πειραματικά δεδομένα με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων⁴.

$$\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T m$$

Τεχνικές διακρίβωσης που βασίζονται στην διαίρεση του κύκλου

Διάφορες τεχνικές έχουν αναπτυχθεί για την διακρίβωση προτύπων επίπεδης γωνίας. Οι τεχνικές αυτές βασίζονται στην διαδοχική σύγκριση η, ίσων μεταξύ τους, επίκεντρων γωνιών και μέτρηση των διαφορών αυτών με autocollimator. Οι βασικές ομάδες είναι:

- Simple-calibration :

Τεχνικές κατά τις οποίες οι γωνίες ενός προς διακρίβωση προτύπου συγκρίνονται με γωνίες που ανήκουν στο ίδιο πρότυπο. Πιο συνηθισμένες είναι:

- Διακρίβωση πολυγώνου με 2 autocollimators.
- Διακρίβωση indexing table (ή angle encoder γωνιακής τράπεζας) με 2 autocollimators και έναν υψηλής ποιότητας καθρέφτη).

- Cross calibration :

Τεχνικές κατά τις οποίες οι γωνίες ενός προς διακρίβωση προτύπου συγκρίνονται με γωνίες που ανήκουν σε ένα δεύτερο πρότυπο. Κάθε γωνία του πρώτου συγκρίνεται διαδοχικά με κάθε γωνία του δεύτερου και ως αποτέλεσμα **τα δύο πρότυπα διακριβώνονται ταυτόχρονα**. Πιο συνηθισμένες είναι:

- Cross calibration μεταξύ πολυγώνου και indexing table (ή angle encoder γωνιακής τράπεζας) με την βοήθεια ενός autocollimator και με τη μέθοδο διπλής περάτωσης (dual closure).
- Cross calibration μεταξύ indexing table (ή angle encoder γωνιακής τράπεζας) και ενός δίδεδρου (δίδεδρος καθρέφτης, δύο πλευρές πολυγώνου, πλακίδιο γωνίας κλπ) με την βοήθεια ενός autocollimator και με τη μέθοδο απλής περάτωσης (simple closure).
- Cross calibration μεταξύ indexing table (ή angle encoder γωνιακής τράπεζας) και ενός δεύτερου indexing table (ή angle encoder γωνιακής τράπεζας) με την βοήθεια ενός autocollimator, ενός υψηλής ποιότητας καθρέφτη και με τη μέθοδο διπλής περάτωσης (dual closure).

- Self calibration :

Τεχνικές κατά τις οποίες το μέσο (ή τα μέσα) μέτρησης της διαφοράς των συγκρινόμενων γωνιών ανήκει στο ίδιο το πρότυπο (π.χ. χρήση πολλαπλών κεφαλών ανάγνωσης που μπορούν να διαβαστούν μεμονωμένα και είναι τοποθετημένες σε διαφορετικές γωνίες ενός angle encoder).

3. Τεχνικές διακρίβωσης που εφαρμόζονται στο E.I.M

Περιγραφή πειραματικής διάταξης

Το εργαστήριο διαστατικών μετρήσεων του EIM είναι εξοπλισμένο με:

1. Μία γωνιακή τράπεζα με angle encoder RON 905 με AWE 1024 interpolator και μετρητική κάρτα IK 220 διακριτικής ικανότητας 0,1'' (0,00001°) και ακρίβειας ±0,2''.
2. Έναν autocollimator Moller-Wedel Elcomat 2000 διακριτικής ικανότητας 0,05'' ακρίβειας ±0,1''.

3. Οπτικό πολύγωνο 12 πλευρών
4. Οπτικό κύβο
5. Πλακίδια γωνίας
6. Sine-bar, κλινόμετρο, αλφάδια ακριβείας κτλ.

Με τον παραπάνω εξοπλισμό, για διακριβώσεις προτύπων (οπτικών πολυγώνων, angle encoders, πλακιδίων γωνίας με γωνία μεγαλύτερη των 25° ή τετράπλευρα κ.α.) με υψηλή ακρίβεια και μικρή αβεβαιότητα, εφαρμόζονται τεχνικές που βασίζονται στην διαίρεση του κύκλου και συγκεκριμένα αυτές που ανήκουν στην ομάδα cross calibration. Για διακριβώσεις προτύπων με μικρότερη ακρίβεια και μεγαλύτερη αβεβαιότητα, εφαρμόζονται τεχνικές απευθείας σύγκρισης με πρότυπα ήδη διακριβωμένα.

Προκειμένου να γίνει κατανοητός ο τρόπος εφαρμογής των τεχνικών υψηλής ακρίβειας θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα διακρίβωσης του angle encoder της γωνιακής τράπεζας του εργαστηρίου και του οπτικού πολυγώνου με $n=3$, χρησιμοποιώντας την τεχνική cross calibration και τη μέθοδο διπλής περάτωσης (dual closure).

Σύμφωνα με την τεχνική αυτή οι δύο κύκλοι (του angle encoder της γωνιακής τράπεζας, B , και του πολυγώνου, A) διαιρούνται σε $n=3$ ίσες γωνίες (b_i, α_i), ονομαστικής τιμής $2\pi/n=120^\circ$. Οι αποκλίσεις τους από αυτήν θα είναι αντίστοιχα Δb_i και $\Delta \alpha_i$ και θεωρούμε ότι είναι γωνίες που μπορούμε να μετρήσουμε με έναν autocollimator.

$$b_i = 120^\circ + \Delta b_i \quad \text{και} \quad \alpha_k = 120^\circ + \Delta \alpha_k, \quad i,k=1,2,3 \quad (9)$$

Ορίζουμε τις αθροιστικές αποκλίσεις ως Δt_i και $\Delta \beta_i$:

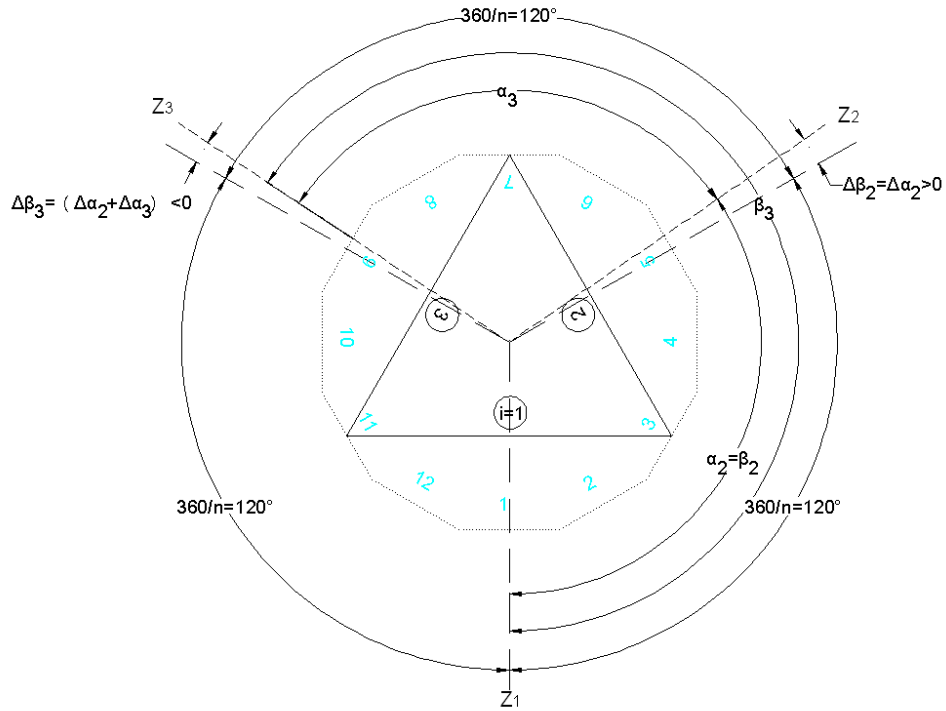
$$\Delta t_i = \sum_{k=2}^i \Delta b_k \quad \Delta \beta_i = \sum_{k=2}^i \Delta \alpha_k \quad (10)$$

Το οπτικό πολύγωνο τοποθετείται στην πρώτη σχετική με την γωνιακή τράπεζα θέση. Σύμφωνα με την αντίστοιχη διαδικασία του εργαστηρίου, τοποθετείται ομόκεντρα ως προς την γωνιακή τράπεζα και γίνονται όλες οι απαραίτητες ρυθμίσεις, έτσι ώστε:

- η εκκεντρότητα να μην υπερβαίνει τα $\pm 200\mu\text{m}$.
- ο οπτικός άξονας του autocollimator να είναι κάθετος στον άξονα περιστροφής της γωνιακής τράπεζας και να περνά από το κέντρο της ανακλαστικής πλευράς του πολυγώνου.
- το πολύγωνο να βρίσκεται σε ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής της γωνιακής τράπεζας με τέτοιο τρόπο ώστε το pyramidal error της κάθε ανακλαστικής πλευράς να είναι ελάχιστο.

Προκειμένου να προσδιορίσουμε το πρόσημο των αποκλίσεων θα πρέπει να προσδιορίσουμε το πώς αυτό αλλάζει κατά την περιστροφή του συστήματος γωνιακή τράπεζα – οπτικό πολύγωνο στον angle encoder και τον autocollimator. Έστω ότι δεξιά περιστροφή του συστήματος συνεπάγεται αύξηση της τιμής του angle encoder, του autocollimator και της φοράς αρίθμησης του πολυγώνου.

Η γωνιακή τράπεζα γυρίζει δεξιόστροφα κατά την ονομαστική τιμή της γωνίας $B, A=120^\circ$ και καταγράφονται οι αρχικές και τελικές τιμές του angle encoder και του autocollimator στις θέσεις $i=1, 2$.



Για την γωνία α_2 και από την σχέση (9) θα έχουμε:

$$\alpha_2 = z_2 - z_1 \quad (11)$$

$$120^\circ + \Delta\alpha_2 =$$

όπου z : η γωνία μεταξύ του κάθετου στην ανακλαστική επιφάνεια του πολυγώνου διανύσματος, Z , και του μηδενός του angle encoder της γωνιακής τράπεζας.

Όμως :

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi_1 + \Delta t_1 - \theta_1 \\ z_2 &= \varphi_2 + \Delta t_2 - \theta_2 \end{aligned} \quad (12)$$

όπου φ : η ένδειξη του angle encoder
 θ : η ένδειξη του autocollimator.

Απο τις (11) και (12) έχουμε:

$$\begin{aligned} 120^\circ + \Delta\alpha_2 &= \varphi_2 + \Delta t_2 - \theta_2 - \varphi_1 + \Delta t_1 - \theta_1 \\ \Delta\alpha_2 - \Delta b_2 &= \varphi_2 - \varphi_1 - 120^\circ - \theta_2 + \theta_1 \end{aligned} \quad (13)$$

Αν θέσουμε ως m_2 το μέρος της εξίσωσης (13) που προκύπτει από τις μετρήσεις $[(\varphi_2 - \varphi_1) - (\theta_2 - \theta_1) - 120^\circ]$ θα έχουμε:

$$\Delta\alpha_2 - \Delta b_2 = m_2 \quad (14)$$

Αυτό επαναλαμβάνεται για όλες τις πλευρές του οπτικού πολυγώνου :

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_1 - \Delta b_1 &= m_1 \\ \Delta\alpha_2 - \Delta b_2 &= m_2 \\ \Delta\alpha_3 - \Delta b_3 &= m_3\end{aligned}\quad (15)$$

Στη συνέχεια, κρατώντας σταθερή τη θέση της γωνιακής τράπεζας, περιστρέφουμε το πολύγωνο αριστερόστροφα κατά την ονομαστική τιμή της γωνίας $B,A = 120^\circ$ (με την βοήθεια των ενδείξεων του autocollimator). Αυτή είναι η δεύτερη σχετική θέση (από τις συνολικά 3) και επαναλαμβάνουμε τις μετρήσεις για όλες τις πλευρές του οπτικού πολυγώνου σχηματίζοντας τις διαφορές :

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_2 - \Delta b_1 &= m_4 \\ \Delta\alpha_3 - \Delta b_2 &= m_5 \\ \Delta\alpha_1 - \Delta b_3 &= m_6\end{aligned}\quad (16)$$

Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία για την επόμενη σχετική θέση και για όλες τις πλευρές του οπτικού πολυγώνου, σχηματίζονται οι διαφορές :

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_3 - \Delta b_1 &= m_7 \\ \Delta\alpha_1 - \Delta b_2 &= m_8 \\ \Delta\alpha_2 - \Delta b_3 &= m_9\end{aligned}\quad (17)$$

Οι περιορισμοί που θέτουν οι περατώσεις των κύκλων μας δίνουν δύο επιπλέον εξισώσεις :

$$\sum_{i=1}^3 \Delta\alpha_i = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^3 \Delta b_i = 0 \quad (18)$$

Έτσι, καταλήγουμε σε ένα σύστημα $n^2+2=11$ εξισώσεων με $2n=6$ αγνώστους. Εκφραζόμενο σε μορφή πινάκων θα είναι

$$Ax=m : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta\alpha_1 \\ \Delta\alpha_2 \\ \Delta\alpha_3 \\ \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \Delta b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ m_9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Δεδομένου ότι οι τιμές του πίνακα m προσδιορίζονται με πειραματικές μετρήσεις, το σύστημα λύνεται με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων

$$\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T m$$

4. Υπολογισμός αβεβαιότητας στις διακριβώσεις γωνιών

Η μέτρηση της γωνίας μεταξύ δύο πλευρών ενός πολυγώνου ή ενός πλακιδίου προκύπτει από τις εξισώσεις (12) και (13) η οποία, λαμβάνοντας υπόψη και τις παραμέτρους που επηρεάζουν την ακρίβεια της κάθε μέτρησης, δίνεται από:

$$m = [(\varphi_{fin} - \varphi_{in}) - (\theta_{fin} - \theta_{in}) - 120^\circ] + \delta a + \delta a_r + \delta a_k + \delta t + \delta t_r + \delta t_k + \delta t_a + \delta e + \delta p + \delta f \quad (20)$$

η κάθε παράμετρος περιγράφεται παρακάτω στον πίνακα των αβεβαιοτήτων⁴⁻⁶.

Πίνακας 1. Πίνακας αβεβαιοτήτων

Παράμετρος	$u(x_i)$ - sec	ν	c_i	$c_i * u(x_i)$
$\varphi - \theta$	0.070	5	1	0.070
δa , η ακρίβεια του autocollimator (πιστοποιητικό διακρίβωσης), $\pm 0,05''$	0.029	50	1	0.029
δa_r διακριτική ικανότητα του autocollimator, $0,05''$	0.014	50	1	0.014
δa_k η επαναληψιμότητα του autocollimator, $\pm 0,1''$ ($k=2$)	0.029	13	1	0.029
δt , η ακρίβεια της γωνιακής τράπεζας (πιστοποιητικό διακρίβωσης), $\pm 0,5''$ ($k=2$)	0.144	50	1	0.144
δt_r , η διακριτική ικανότητα της γωνιακής τράπεζας, $0,1''$	0.029	50	1	0.029
δt_k , η επαναληψιμότητα της γωνιακής τράπεζας, $\pm 0,2''$ ($k=2$)	0.058	13	1	0.058
δt_a , η ευθυγράμμιση των αξόνων του autocollimator με τον άξονα περιστροφής του τραπέζιου, $0,05''$	0.014	13	1	0.014
δe , η εκκεντρότητα του οπτικού πολυγώνου ή του πλακιδίου γωνίας $0.1''/\text{mm}$	0.012	13	1	0.012
δp , Τα σφάλματα πυραμίδας, $0,01''$	0.006	13	1	0.006
δf , η επιπεδότητα των ανακλαστικών επιφανειών του πολυγώνου ή του πλακιδίου γωνίας $0,01''$	0.006	13	1	0.006

Από τον Πίνακα 1 και σύμφωνα με το πρότυπο “Guide to the expression of uncertainty in Measurement”⁷ προκύπτει η συνολική αβεβαιότητα u_c και οι ενεργοί βαθμοί ελευθερίας ν_{eff} :

$$u_c(m) = 0.18 \text{ sec} \quad \text{και} \quad \nu_{\text{eff}} = 72$$

επομένως για ποσοστό εμπιστοσύνης 95% η διευρυμένη αβεβαιότητα είναι :

$$U(m)=0.4 \text{ sec}$$

Χρησιμοποιώντας την αβεβαιότητα της κάθε μέτρησης m η αβεβαιότητα των αποκλίσεων t_i και p_i του παραδείγματος της προηγούμενης παραγράφου δίνεται από⁴

$$u_c(t_1) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial m_i} \right)^2 u^2(m) \quad (21)$$

η οποία για $n=3$ δίνει

$$u_c(t) = u_c(p) = \frac{\sqrt{19}}{9} u(m) \quad (22)$$

5. Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή παρουσιάσαμε της τεχνικές διακρίβωσης προτύπων επίπεδης γωνίας στο Ελληνικό Ινστιτούτο Μετρολογίας. Η προς διακρίβωση γωνία συγκρίνεται είτε με άλλα διακριβωμένα πρότυπα, είτε με όλες τις γωνίες ενός κατάλληλα διαιρεμένου κύκλου. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το άθροισμα όλων αυτών των επίκεντρων γωνιών σε ένα επίπεδο ισούται με 2π rad (360°) και εφαρμόζοντας τεχνικές σύγκρισης (self calibration – cross calibration techniques), μπορούμε να διακριβώσουμε πρότυπα όπως οπτικά πολύγωνα, πλακίδια γωνίας, και angle encoders γωνιακών τραπεζών με αβεβαιότητες μικρότερες από ένα δευτερό του δευτερολέπτου της μοίρας, $U(m)=0.4 \text{ sec}$.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- [1] *The International System of Units (SI)* (Bureau International des Poids et Mesures, 1998).
- [2] W. H. Emerson, *Differing angles on angle*, Metrologia **42**, L23 (2005).
- [3] P. J. Sim, in *Modern techniques in metrology*, edited by P. L. Hewlitt (World Scientific, Singapore, 1984), p. 102.
- [4] W. T. Estler, *Uncertainty Analysis for Angle Calibrations Using Circle Closure*, J. Res. Natl. Inst. Stand. technol. **103**, 141 (1998).
- [5] O. A. Kruger, *Methods for determining the effect of flatness deviations, eccentricity and pyramidal errors on angle measurements*, Metrologia **37**, 101 (2000).
- [6] J. A. Stone, M. Amer, B. Faust, et al., *Uncertainties in Small-Angle Measurement Systems Used to Calibrate Angle Artifacts*, J. Res. Natl. Inst. Stand. technol. **109**, 319 (2004).
- [7] ISO, *Guide to the expression of uncertainty in measurement*. (International Organization for Standardization, 1995).