

**ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΩΝ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ
(ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ) ΜΕΓΕΘΩΝ: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΜΕ
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΑΝΑΛΥΤΗ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΩΝ**

Γ. ΚΡΙΚΕΛΑΣ, Α. ΧΑΤΖΟΠΟΥΛΟΣ, Χ. ΜΠΑΝΤΗΣ

**ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΜΕΤΡΟΛΟΓΙΑΣ,
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ
ΒΙ.ΠΕ.Θ. ΣΙΝΔΟΣ, 57022, ΟΙΚ. ΤΕΤ. 45
gkrik@eim.gr**

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Μέχρι σχετικά πρόσφατα, η έμφαση στον υπολογισμό αβεβαιοτήτων επικεντρωνόταν στην περίπτωση μονομεταβλητών (βαθμωτών) ποσοτήτων, γεγονός που αποτυπωνόταν και στη «βίβλο» της μετρολογίας, το GUM (“*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*”). Τα τελευταία χρόνια έχει εκδηλωθεί έντονο ενδιαφέρον για την περίπτωση των πολυμεταβλητών (διανυσματικών) μεγεθών- ενδιαφέρον που έχει οδηγήσει και στην ανάγκη έκδοσης σχετικού συμπληρώματος του GUM.

Για το Εργαστήριο Υψηλών Συχνοτήτων του ΕΙΜ, το συγκεκριμένο θέμα παρουσιάζει αυξημένο ενδιαφέρον, μια που βρίσκει εφαρμογή στον υπολογισμό αβεβαιοτήτων των μετρήσεων με διανυσματικό αναλυτή δικτυωμάτων-οι οποίες είναι εν γένει διμεταβλητά μεγέθη, μια υποπερίπτωση δηλαδή πολυμεταβλητών μεγεθών.

Στην παρούσα εργασία, επιχειρείται αρχικά μια αποτύπωση της τρέχουσας κατάστασης στο πεδίο αυτό και παράλληλα παρουσιάζονται οι σχετικές δραστηριότητες που αναπτύσσονται στο Εργαστήριο Υψηλών Συχνοτήτων και γενικότερα στο Ελληνικό Ινστιτούτο Μετρολογίας. Αναπτύσσονται οι γενικές αρχές στην περίπτωση πολυμεταβλητών μεγεθών και στη συνέχεια εξειδικεύονται στην περίπτωση των διμεταβλητών (π.χ. μιγαδικών) μεγεθών. Γίνεται παρουσίαση σχετικού λογισμικού υπολογισμού αβεβαιοτήτων που αναπτύσσεται στο εργαστήριο, για να εξυπηρετηθούν οι εφαρμογές μετρήσεων με διανυσματικό αναλυτή δικτυωμάτων. Για την επαλήθευση των αποτελεσμάτων του εν λόγω λογισμικού γίνεται σύγκριση με αποτελέσματα από άλλα διαθέσιμα λογισμικά καθώς και με αποτελέσματα από προσομοιώσεις Monte Carlo.

ABSTRACT

Until recently, the emphasis on uncertainty calculation has been laid on the case of univariate (scalar) quantities, a fact also depicted in the “bible” of metrology, the GUM (“*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*”). During the last years, great interest has been shown in the case of multivariate (vector) quantities-interest that has led to the need for a publication of a relative supplement of the GUM.

For EIM’s Laboratory of High Frequencies, the specific subject is of particular interest, as it finds use in the uncertainty calculation of measurements carried out with a vector network analyzer-which are in general bivariate quantities, a special case of multivariate quantities.

In this work, a presentation of the current situation in this field is attempted originally, while at the same time the relative activities carried out by the Laboratory of High Frequencies and by the Hellenic Institute of Metrology (EIM) generally are described. The general principles for the case of multivariate quantities are deployed and these are then particularized for the bivariate (for example complex) quantities. Pertinent software that is being developed by the laboratory, to serve the needs of measurement applications carried out with a vector network analyzer, is presented. To validate the results of the software in question, a comparison with the results from other available software, as well as from Monte Carlo simulation, is made.

Λέξεις- Κλειδιά: Διανυσματικός αναλυτής δικτυωμάτων, υπολογισμός αβεβαιοτήτων, προσομοίωση Monte Carlo, πολυμεταβλητές & διμεταβλητές συναρτήσεις κατανομής

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σήμερα, υπάρχουν διαθέσιμα πολλά εθνικά-NIST (1994), UKAS (2007)-και διεθνή-JCGM 100:2008, JCGM 101:2008, JCGM 102:2009 - πρότυπα ή/και οδηγίες που παρέχουν καθοδήγηση για τον υπολογισμό και την έκφραση της αβεβαιότητας των αποτελεσμάτων μετρήσεων. Ωστόσο, η έμφαση σε αυτά δίνεται στο χειρισμό βαθμωτών μεγεθών. Συνεπώς, αυτή η πληροφορία έχει περιορισμένη εφαρμογή όταν τα μεγέθη είναι διανυσματικά, όπως για παράδειγμα μιγαδικοί συντελεστές σκέδασης (S-parameters). Ήδη, το Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών (BIPM), αναγνωρίζοντας την ανάγκη προς την κατεύθυνση έκδοσης οδηγιών που να καλύπτουν αυτή την περίπτωση, έχει προβεί στην έκδοση σχετικού συμπληρώματος (αν και ακόμη σε μορφή προσχεδίου) του πάλαι ποτέ GUM-βλ. JCGM 102:2009.

Το ζητούμενο είναι να υπάρξει μια γενίκευση των αρχών του GUM για βαθμωτά μεγέθη ώστε να καλύπτεται η γενική περίπτωση κατά την οποία το μοντέλο μέτρησης έχει οποιοδήποτε αριθμό μεταβλητών εισόδου και οποιοδήποτε αριθμό μεταβλητών εξόδου. Το μοντέλο και τα μεγέθη που εμπλέκονται μπορεί να είναι είτε πραγματικά είτε μιγαδικά. Υπάρχουν δύο προσεγγίσεις για το χειρισμό τέτοιων μοντέλων. Η πρώτη είναι μια γενίκευση των αρχών του GUM για τον υπολογισμό αβεβαιοτήτων με μια μεταβλητή εξόδου. Η δεύτερη είναι μια μέθοδος Monte Carlo ως εφαρμογή της διάδοσης κατανομών. Σε περιπτώσεις όπου η δυνατότητα εφαρμογής της πρώτης προσέγγισης είναι αμφισβητήσιμη, κατάλληλη χρήση της μεθόδου Monte Carlo αναμένεται να δώσει έγκυρα αποτελέσματα.

Οι εκφράσεις οι αντίστοιχες προς το φορμαλισμό του GUM για τις «συνήθειες» αβεβαιότητες μετασχηματίζονται με ένα πολύ συμπαγή τρόπο με τη χρήση πινάκων και διανυσμάτων, τα στοιχεία των οποίων περιέχουν μεταβλητότητες (variances-τετράγωνα συνήθων αβεβαιοτήτων), συμμεταβλητότητες και συντελεστές ευαισθησίας. Ένα πλεονέκτημα αυτής της μορφής αναπαράστασης είναι η εύκολη εφαρμογή τους σε πολλές γλώσσες προγραμματισμού και συστήματα που υποστηρίζουν την άλγεβρα πινάκων.

2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

2.1 ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Στη γενική περίπτωση, μια συνάρτηση μέτρησης πολλών μεταβλητών καθορίζει μια σχέση μεταξύ μιας ποσότητας εξόδου $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^T$ και μιας ποσότητας εισόδου $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$ και παίρνει τη μορφή:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{X}), \mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)^T \quad (1)$$

Για μια εκτίμηση x της \mathbf{X} προκύπτει μια εκτίμηση y της \mathbf{Y} , $y = f(x)$. Ο πίνακας συμμεταβλητότητας που σχετίζεται με την y (διαστάσεων $m \times m$) δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{U}_y = \begin{bmatrix} \text{cov}(y_1, y_1) & \cdots & \text{cov}(y_1, y_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(y_m, y_1) & \cdots & \text{cov}(y_m, y_m) \end{bmatrix} \quad (2)$$

όπου $\text{cov}(y_j, y_j) = u^2(y_j)$, που δίνεται και από τη σχέση:

$$\mathbf{U}_y = \mathbf{C}_x \mathbf{U}_x \mathbf{C}_x^T \quad (3)$$

όπου \mathbf{C}_x είναι ο πίνακας ευαισθησίας διαστάσεων $m \times N$, που προκύπτει από τη σχέση:

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial X_N} \end{bmatrix} \quad (4)$$

στο $\mathbf{X} = x$.

2.2 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΜΙΑΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ (ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ) ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ ΕΞΟΔΟΥ

Θα εστιάσουμε τώρα την προσοχή μας στην περίπτωση που έχουμε ως έξοδο μια μόνο μιγαδική ποσότητα, η οποία βέβαια είναι διμεταβλητή, καθώς αυτή η περίπτωση παρουσιάζει για μας ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Μια τυχαία συνάρτηση μέτρησης $y = f(\mathbf{X}) = f(x_1, \dots, x_m)$ περιγράφει τη σχέση ανάμεσα σε μια μιγαδική ποσότητα, το *μετρούμενο μέγεθος* (measurand) y , και σε m επιδρώσες ποσότητες, από τις οποίες εξαρτάται η τιμή του. Η συνάρτηση f απαρτίζεται από δύο βαθμωτές συνιστώσες f_1, f_2 , την πραγματική και μιγαδική συνιστώσα αντίστοιχα (δηλ. $y = f_1(\mathbf{X}) + jf_2(\mathbf{X})$).

Η αβεβαιότητα των τιμών των ποσοτήτων εισόδων αναπαρίσταται από ένα πίνακα συμμεταβλητότητας διαστάσεων $2m \times 2m$:

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} u^2(x_{11}) & u(x_{11}, x_{21}) & \dots & u(x_{11}, x_{1m}) & u(x_{11}, x_{2m}) \\ u(x_{21}, x_{11}) & u^2(x_{22}) & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u(x_{1m}, x_{11}) & u(x_{1m}, x_{21}) & \dots & u^2(x_{1m}) & u(x_{1m}, x_{2m}) \\ u(x_{2m}, x_{11}) & u(x_{2m}, x_{21}) & \dots & u(x_{2m}, x_{1m}) & u^2(x_{2m}) \end{bmatrix} \quad (5)$$

όπου τα διαγώνια στοιχεία, $u^2(x_{ij})$ αναπαριστούν τη συνήθη μεταβλητότητα των αντίστοιχων εισόδων x_{ij} και τα στοιχεία $u(x_{ij}, x_{kl})$ εκτός της διαγωνίου αναπαριστούν τη συμμεταβλητότητα μεταξύ των x_{ij}, x_{kl} .

Η αβεβαιότητα στο y εκφράζεται με έναν πίνακα συμμεταβλητότητας διαστάσεων 2×2 , ο οποίος προκύπτει με τη χρήση μιας «διμεταβλητής» μορφής του γκαουσιανού «νόμου διάδοσης σφαλμάτων». Ο νόμος αυτός καθορίζει πως η αβεβαιότητα των τιμών που ανατίθενται στις μεταβλητές εισόδου διαδίδεται σε μια εκτίμηση της αβεβαιότητας ενός αποτελέσματος μέτρησης. Η συμμεταβλητότητα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{U}(y) = \mathbf{J}(y)\mathbf{U}(\mathbf{X})\mathbf{J}(y)^T \quad (6)$$

όπου $\mathbf{J}(y)$ είναι ο $2 \times 2m$ Ιακωβιανός πίνακας των μερικών παραγώγων των βαθμωτών συνιστωσών της f , ως προς τα βαθμωτά στοιχεία του \mathbf{X} :

$$\mathbf{J}(y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{11}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{21}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{12}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{22}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{1m}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{2m}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{11}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{21}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{12}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{22}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{1m}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{2m}} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό αυτής της αναπαράστασης είναι πως ο Ιακωβιανός πίνακας $\mathbf{J}(\mathbf{y})$ έχει μια δομή (2×2) «ψηφίδων» η οποία μπορεί να συσχετιστεί με τις μερικές παραγώγους της f (Hall, 2004):

$$\mathbf{J}(\mathbf{y}) = [\mathbf{J}_1(\mathbf{y}) \mathbf{J}_2(\mathbf{y}) \cdots \mathbf{J}_m(\mathbf{y})] \quad (8)$$

όπου

$$\mathbf{J}_j(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_j}{\partial x_{1j}} & \frac{\partial f_j}{\partial x_{2j}} \\ \frac{\partial f_j}{\partial x_{1j}} & \frac{\partial f_j}{\partial x_{2j}} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Αυτές οι «ψηφίδες» αντιπροσωπεύουν τους διμεταβλητούς συντελεστές ευαισθησίας του προβλήματος. Μπορούν να συσχετιστούν απευθείας με τις μιγαδικές μερικές παραγώγους της f μέσω μιας απλής και κομψής αναπαράστασης πίνακα για μιγαδικούς αριθμούς: για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = a + jb$, ο μετασχηματισμός

$$\mathbf{M}(z) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad (10)$$

παράγει μια αναπαράσταση 2×2 του z . Τέτοιοι πίνακες συμπεριφέρονται ως μιγαδικοί αριθμοί για τις συνήθεις αριθμητικές πράξεις πινάκων. Επιπλέον, αν μια μιγαδική συνάρτηση είναι αναλυτική στην περιοχή ενδιαφέροντος, θα ισχύουν για τις μερικές παραγώγους της οι σχέσεις Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial f_1}{\partial a} = \frac{\partial f_2}{\partial b}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial b} = -\frac{\partial f_2}{\partial a} \quad (11)$$

Συνεπώς, λόγω των εξισώσεων (10) και (11), ο Ιακωβιανός πίνακας μετασχηματίζεται εν τέλει στη μορφή:

$$\mathbf{J}(\mathbf{y}) = \left[\mathbf{M}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \mathbf{M}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) \cdots \mathbf{M}\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) \right] \quad (12)$$

Ένα άλλο σημείο στο οποίο πρέπει να σταθεί κάποιος, είναι στη διαφοροποίηση του τρόπου έκφρασης των διαστημάτων εμπιστοσύνης για την περίπτωση μιγαδικών (ή πολυμεταβλητών εν γένει) μεγεθών. Υπενθυμίζεται εδώ ότι στην περίπτωση μιας μεταβλητής εξόδου και υποθέτοντας κανονική κατανομή, ο συντελεστής κάλυψης για ένα επίπεδο εμπιστοσύνης cl δίνεται από τις εκφράσεις:

α) $k_{cl} = erf^{-1}(cl) \quad (13)$

για την περίπτωση άπειρων βαθμών ελευθερίας ($k_{0.95} = 1.96$, $u_{cl} = k \cdot u$),

β) $k_{v,cl} = T^{-1}(cl, v) \quad (14)$

(πεπερασμένοι βαθμοί ελευθερίας, $DoF=v$, $k_{4,0.95} = 2.78$, $k_{\infty,0.95} = 1.96$)

Αντίστοιχα, για την περίπτωση πολυμεταβλητών μεγεθών γίνεται πια λόγος για περιοχή (κι όχι διάστημα) κάλυψης (συνήθως για ελλειπτική ή υπερ-ελλειπτική και ορθογωνική ή υπερ-ορθογωνική) και οι νέες εκφράσεις γίνονται:

α) $k_{n,cl} = \sqrt{X^{-1}(cl, n)} \quad (15)$

(άπειροι βαθμοί ελευθερίας, n : διάσταση, κατανομή χ -τετραγωνική, $k_{1,0.95} = 1.96$, $k_{4,0.95} = 3.08$) και

β) $k_{n,v,cl} = \sqrt{\frac{n \cdot v}{v+1-n} F^{-1}(n, v+1-n, cl)} \quad (16)$

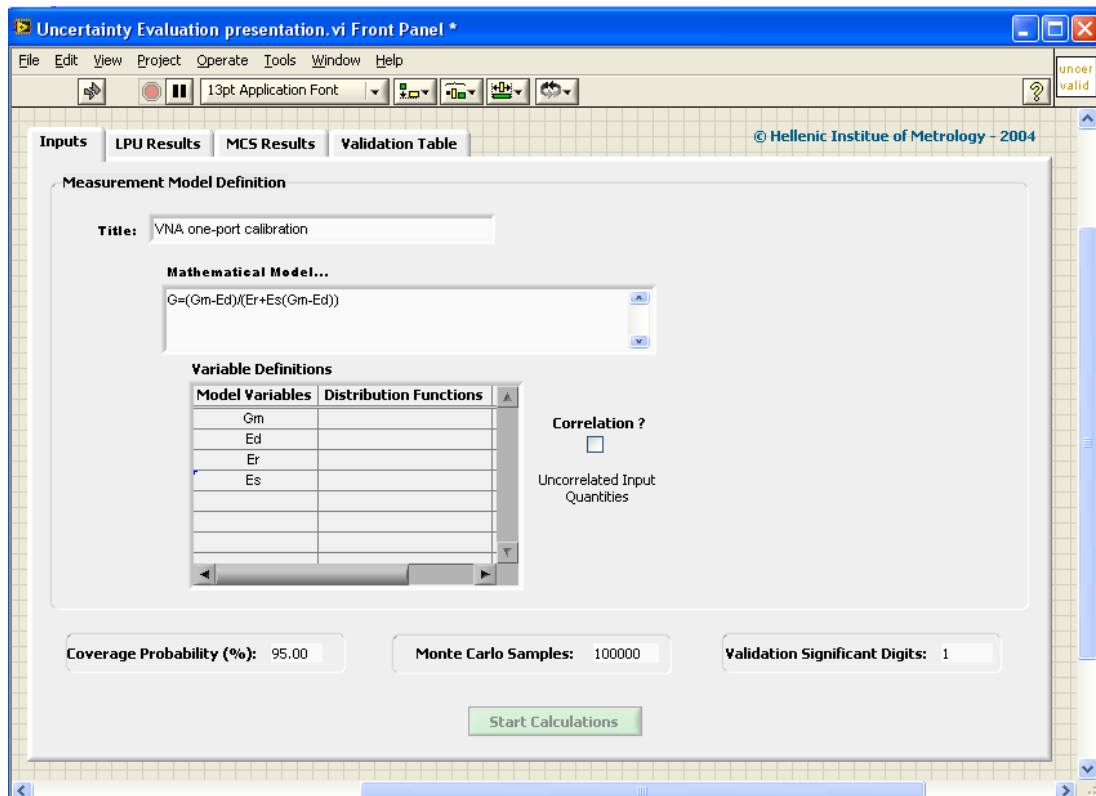
(πεπερασμένοι βαθμοί ελευθερίας ν , n : διάσταση, κατανομή F , $k_{2,5,0.95} = 4.17$, $k_{1,\infty,0.95} = 1.96$)

3. ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΒΩΣΗΣ ΜΙΑΣ ΘΥΡΑΣ ΕΝΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΑΝΑΛΥΤΗ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΩΝ

3.1 ΧΡΗΣΗ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΩΝ

Στο Ελληνικό Ινστιτούτο Μετρολογίας πρωταρχικό ρόλο στην αποτίμηση των αποτελεσμάτων των μετρήσεων παίζει ο υπολογισμός των αβεβαιοτήτων των διαδικασιών μέτρησης. Ως εκ τούτου δίνεται ειδικό βάρος στον όσο το δυνατόν ακριβέστερο υπολογισμό των αβεβαιοτήτων και ει δυνατόν στον υπολογισμό τους με διαφορετικούς τρόπους ώστε να διασφαλίζεται η εγκυρότητα των υπολογισμών.

Στα πλαίσια αυτά έχουν αναπτυχθεί στο παρελθόν κατάλληλα εργαλεία που αποσκοπούν στη διευκόλυνση τέτοιου είδους επικυρώσεων. Ένα από αυτά είναι λογισμικό σε περιβάλλον εργασίας Labview που έχει αναπτυχθεί από το προσωπικό της Διεύθυνσης Φυσικών Μεγεθών για τις ανάγκες των εργαστηρίων της. Το εν λόγω λογισμικό (ένα στιγμιότυπο της οθόνης εισαγωγής δίνεται στο Σχήμα 1) επιτρέπει αφενός τον υπολογισμό της αβεβαιότητας μέσω του μοντέλου LPU (Linear Propagation of Uncertainty) και αφετέρου της εκτίμησής της χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Monte Carlo. Επίσης παρέχει τη δυνατότητα σύγκρισης των αποτελεσμάτων των δύο διαφορετικών μεθόδων, ώστε να ελέγχεται άμεσα η εγκυρότητά τους. Το λογισμικό είναι πλήρως παραμετροποιήσιμο από το χρήστη και υποστηρίζει την εισαγωγή όποιου μαθηματικού μοντέλου επιθυμεί ο χρήστης.

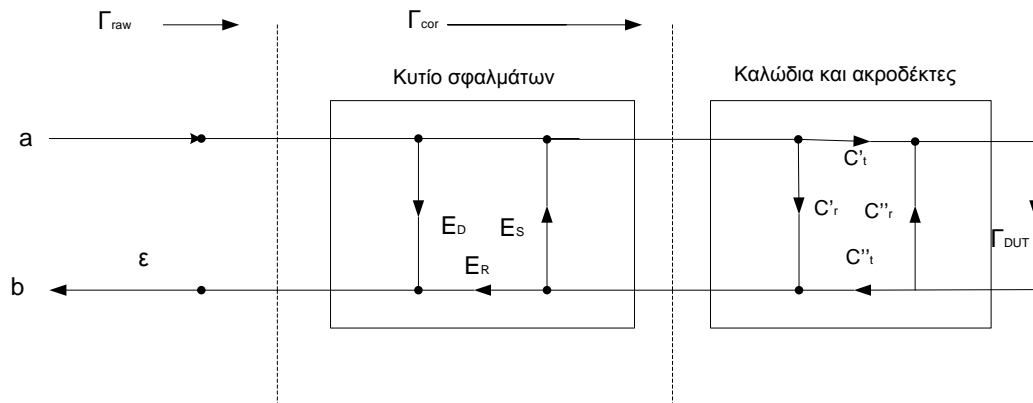


Σχήμα 1
Οθόνη εισαγωγής λογισμικού υπολογισμού αβεβαιοτήτων

Εξαιρετικό ενδιαφέρον για το Εργαστήριο Υψηλών Συχνοτήτων παρουσιάζουν οι μετρήσεις με διανυσματικούς αναλυτές, οι οποίοι αποτελούν πλέον βασικότατο εργαλείο για μετρήσεις

ραδιοκυμάτων και μικροκυμάτων (RF & MW). Στις μετρήσεις αυτές εμφανίζονται κατά κόρον μιγαδικές ποσότητες ως αποτέλεσμα. Θα περιοριστούμε σ' αυτή την εργασία στην πιο «απλή» περίπτωση, όπου γίνεται χρήση μόνο μιας θύρας ενός διανυσματικού αναλυτή για τη μέτρηση του συντελεστή ανάκλασης ενός στοιχείου.

Στην περίπτωση αυτή, πρέπει να γίνει διακρίβωση μιας θύρας του αναλυτή. Οι πηγές σφάλματος είναι γενικά οι εξής: παραμένουσα κατευθυντικότητα (residual directivity E_D), παραμένουσα προσαρμογή πηγής (residual source match, E_S), παραμένουσα ιχνηλάτηση ανάκλασης (residual reflection tracking, E_R), κατώφλι θορύβου, θόρυβος ίχνους, καθώς και επαναληψιμότητα καλωδίων και προσαρμογών. Εστιάζουμε στα παραμένοντα σφάλματα (E_D , E_S , E_R), καθώς αυτά μπορούν να απαλειφθούν μέσω της διακρίβωσης μιας θύρας του αναλυτή. Στο Σχήμα 2 δίνεται το διάγραμμα ροής σήματος μιας μέτρησης μιας θύρας με διανυσματικό αναλυτή δικτυωμάτων (οι όροι στα δεξιά, που αντιπροσωπεύουν καλώδια και ακροδέκτες, μπορούν να απαλειφθούν για απλότητα, καθώς θεωρούμε έναν ιδανικό αναλυτή δικτυωμάτων). Μια διαδικασία «ρύθμισης» (γνωστή ως «διακρίβωση») κάνει μια εκτίμηση των παραμένοντων σφαλμάτων E_D , E_S και E_R , μετρώντας τρία γνωστά πρότυπα χρησιμοποιώντας μια τεχνική διακρίβωσης γνωστή ως ανοιχτοκύκλωμα-βραχυκύκλωμα-φορτίο (open-short-load, OSL) και διορθώνει στη συνέχεια τις μετρούμενες τιμές (η διαδικασία αυτή είναι λίγο πολύ αυτόματη στους σύγχρονους διανυσματικούς αναλυτές, χωρίς όμως να λαμβάνει υπόψη της την αβεβαιότητα).



Σχήμα 2

Διάγραμμα ροής σήματος μιας μέτρησης μιας θύρας ενός διανυσματικού αναλυτή δικτυωμάτων

Η διαδικασία διακρίβωσης OSL χρησιμοποιεί τη μέτρηση ενός σετ από γνωστά πρότυπα αναφοράς για να κάνει μια εκτίμηση των παραμέτρων του «κυτίου σφάλματος». Η σχέση μεταξύ των τιμών που μετράει ο αναλυτής, των ονομαστικών τιμών (π.χ. από ένα πιστοποιητικό διακρίβωσης) των προτύπων αναφοράς και των όρων σφάλματος εκφράζεται ως ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους, ή σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_n^O & 1 & -\Gamma_n^O \Gamma_m^O \\ \Gamma_n^S & 1 & -\Gamma_n^S \Gamma_m^S \\ \Gamma_n^L & 1 & -\Gamma_n^L \Gamma_m^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_m^O \\ \Gamma_m^S \\ \Gamma_m^L \end{bmatrix} \quad (17)$$

Οι όροι των εναπομένοντων σφαλμάτων θα δίνονται τότε από τις εξισώσεις:

$$E_D = B \quad (18)$$

$$E_S = -C \quad (19)$$

$$E_R = A - BC \quad (20)$$

Στο προαναφερθέν λογισμικό σε περιβάλλον Labview για τον υπολογισμό αβεβαιοτήτων στην περίπτωση μιας μεταβλητής εξόδου ενσωματώθηκαν επιπλέον αρθρώματα που επεκτείνουν τη

δυνατότητα υπολογισμού αβεβαιότητας στη γενικευμένη περίπτωση πολλών μεταβλητών εξόδου (σαν πρώτο βήμα υλοποιήθηκε ενσωμάτωση για την περίπτωση διμεταβλητών-μιγαδικών συγκεκριμένα-μεγεθών, ενώ μελλοντικά σχεδιάζεται περαιτέρω επέκταση του λογισμικού). Ειδικότερα, ενσωματώθηκε το μοντέλο υπολογισμού για την πιο πάνω περίπτωση, της διακρίβωσης μιας θύρας διανυσματικού αναλυτή δικτυωμάτων.

Για τη διευκόλυνση του προγραμματισμού χρησιμοποιήθηκε η ιδέα των *αβέβαιων αριθμών* (Hall, 2006), σύμφωνα με την οποία χρησιμοποιούμε μια *οντότητα* που ενσωματώνει ταυτόχρονα πληροφορία τόσο για την τιμή όσο και για την αβεβαιότητα μιας ποσότητας. Οι κανόνες που ρυθμίζουν τους υπολογισμούς με *αβέβαιους αριθμούς* τους καθιστούν ιδιαίτερα κατάλληλους σε διαδικασίες επεξεργασίας δεδομένων καθώς επιτρέπουν την ταυτόχρονη διάδοση (σε διαδοχικά υπολογιστικά βήματα) τόσο της τιμής όσο και της αντίστοιχης αβεβαιότητάς της, που είναι ανάλογη με τη ροή δεδομένων σε ένα πολύπλοκο, αρθρωτό σύστημα μέτρησης. Έτσι, η προσέγγιση αυτή αντιμετωπίζει το πρόβλημα της πολυπλοκότητας, σε συστήματα όπως οι διανυσματικοί αναλυτές δικτυωμάτων, επιτρέποντας οι υπολογισμοί να γίνονται σε κατάλληλα ενδιάμεσα βήματα.

Ως παράδειγμα εφαρμογής εξετάστηκε η περίπτωση της διακρίβωσης μιας θύρας διανυσματικού αναλυτή. Τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με αντίστοιχα από λογισμικό που έχει διατεθεί από το Εθνικό Ινστιτούτο Μετρολογίας της Ν. Ζηλανδίας (Hall 2007) και βρέθηκαν να συμφωνούν απόλυτα, αποδεικνύοντας έτσι την εγκυρότητα του νέου λογισμικού. Ενδεικτικά αναφέρονται οι τιμές που προέκυψαν, μαζί με τον αντίστοιχο πίνακα συμμεταβλητότητας:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_D \\ \mathbf{E}_S \\ \mathbf{E}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.00 \times 10^{-3} & 7.00 \times 10^{-3} \\ 1.50 \times 10^{-2} & -1.77 \times 10^{-2} \\ 2.13 \times 10^{-1} & 9.19 \times 10^{-1} \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1.89 \times 10^{-4} & 0.00 \times 10^0 & 0.00 \times 10^0 & 1.89 \times 10^{-4} \\ 3.19 \times 10^{-4} & 0.00 \times 10^0 & 0.00 \times 10^0 & 3.19 \times 10^{-4} \\ 9.50 \times 10^{-4} & 0.00 \times 10^0 & 0.00 \times 10^0 & 9.50 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Είναι φανερό ότι ακόμη και για την «απλή» περίπτωση που εξετάσαμε, τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι ήδη αρκετά πολύπλοκα. Γίνεται έτσι προφανές το πόσο πολύτιμη είναι η χρήση λογισμικού για την εκτέλεση τέτοιου είδους υπολογισμών.

3.2. ΧΡΗΣΗ ΜΕΘΟΔΟΥ MONTECARLO

Σαν ένα δεύτερο βήμα επικύρωσης της μεθόδου, αλλά και ως εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της αβεβαιότητας στην περίπτωση μιγαδικών (πολυμεταβλητών) μεγεθών ενσωματώθηκε (για την ακρίβεια επεκτάθηκε η ήδη υπάρχουσα-για την περίπτωση μιας μεταβλητής-δυνατότητας) στο λογισμικό μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo, ιδιαίτερα χρήσιμη και για τις περιπτώσεις όπου η γραμμική προσέγγιση (LPU) φτάνει στα όριά της (επικρατούν οι μη γραμμικότητες ή το θεώρημα κεντρικού ορίου δεν ισχύει).

Η προσέγγιση που ακολουθείται είναι αυτή που προτείνεται στο JCGM 102:2009, όπου ως κοινή (joint) συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$ θεωρείται μια πολυμεταβλητή κατανομή $t_\nu(\bar{x}, \mathbf{S}/n)$ με $\nu = n - N$ βαθμούς ελευθερίας:

$$g_{\mathbf{X}}(\xi) = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(\nu/2)(\pi\nu)^{N/2}} \times [\det(\mathbf{S}/n)]^{-1/2} \left[1 + \frac{1}{\nu} (\xi - \bar{x})^T \left(\frac{\mathbf{S}}{n} \right)^{-1} (\xi - \bar{x}) \right]^{-n/2} \quad (21)$$

όπου $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$, $\mathbf{S} = \frac{1}{\nu} \left[(x_1 - \bar{x})(x_1 - \bar{x})^T + \dots + (x_n - \bar{x})(x_n - \bar{x})^T \right]$.

Τα αποτελέσματα από τη χρήση του μοντέλου φαίνεται σε πρώτη φάση να βρίσκονται σε συμφωνία με εκείνα που προκύπτουν από την εφαρμογή της γενικευμένου μοντέλου LPU, απαιτείται όμως περαιτέρω διερεύνηση, καθώς η εφαρμογή της γενικευμένης μεθόδου Monte Carlo είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη.

4. ΣΥΝΟΨΗ

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε το θέμα της εφαρμογής της επέκτασης του θεωρητικού πλαισίου υπολογισμού αβεβαιότητας στην περίπτωση των διμεταβλητών (μιγαδικών) /πολυμεταβλητών μεγεθών. Εξηγήθηκαν οι λόγοι που καθιστούν μια τέτοια επέκταση αναγκαία καθώς και η κατάσταση που έχει διαμορφωθεί σήμερα διεθνώς. Στη συνέχεια αναπτύχθηκε το γενικότερο μαθηματικό πλαίσιο για την περίπτωση των πολυμεταβλητών μεγεθών εξόδου, το οποίο ακολούθως εξειδικεύθηκε στην περίπτωση των μιγαδικών (διμεταβλητών μεγεθών). Αναλύθηκαν οι λόγοι για τους οποίους η περίπτωση αυτή παρουσιάζει ειδικό ενδιαφέρον στο πεδίο των υψηλών συχνοτήτων, ενώ εξετάστηκε διεξοδικά η περίπτωση της διακρίβωσης μιας θύρας ενός διανυσματικού αναλυτή δικτυωμάτων. Περιγράφηκε η προϋπάρχουσα εμπειρία στο αντικείμενο αυτοματοποίησης υπολογισμών για συναρτήσεις εξόδου μιας μεταβλητής και πως με βάση αυτή έγινε επέκταση του λογισμικού για να συμπεριλάβει και τη γενικότερη περίπτωση πολυμεταβλητών μεγεθών (ειδικότερα των μιγαδικών). Τα αποτελέσματα επαληθεύθηκαν τόσο με τη χρήση σχετικού λογισμικού διαθέσιμου στη διεθνή βιβλιογραφία, όσο και με τη χρήση γενικευμένης μεθόδου Monte Carlo.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Άρθρα σε περιοδικά

Hall B. D., "On the propagation of uncertainty in complex valued quantities", *Metrologia*, 41, 2004, 173-177

Hall B. D., "Monte Carlo uncertainty calculations with small-sample estimates of complex quantities", *Metrologia*, 43, 2006, 220-226

Hall B. D., "Computing uncertainty with *uncertain numbers*", *Metrologia*, 43, 2006, L56-L61

Ridler N. M. and Salter M. J., "An approach to the treatment of uncertainty in complex S-parameter measurements", *Metrologia*, 39, 2002, 295-302

Πρακτικά Συνεδρίων

Hall B. D., "A computational technique for evaluating and propagating the uncertainty of complex valued quantities", Proc. 60th ARFTG, Washington DC, USA, 5-6 December 2002, pp 19-28

Ridler N. M. and Salter M. J., "Evaluating and expressing uncertainty in complex S-parameter measurements", 56th ARFTG Conf. Digest, Boulder, Colorado, USA, November 2000

Ridler N. M. and Salter M. J., "Propagating S-parameter uncertainties to other measurement quantities", Proc. 58th ARFTG, San Diego, California, USA, 29-30 November 2001

Διεθνή Πρότυπα και Οδηγίες

JCGM 100:2008 (GUM 1995 with minor corrections), "Evaluation of measurement data-Guide to the expression of uncertainty in measurement", September 2008, electronic form

JCGM 101:2008, "Evaluation of measurement data-Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement"-Propagation of distributions using a Monte Carlo method", 2008, electronic form

JCGM 102:2009, "Evaluation of measurement data-Supplement 2 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement"-Models with any number of output quantities", 2009 (draft), electronic form

NIST, "Guidelines for evaluating and expressing the uncertainty of NIST measurement results", NIST *Technical Note 1297*, 1994

UKAS, "The expression of uncertainty and confidence in measurement", United Kingdom Accreditation Service, M3003, Edition 2, January 2007

Βιβλία και εγχειρίδια

Hall B. D., "Working with CGUM: RF Measurement examples" (Industrial research limited manual 81), MSL, 17 December 2007

Lira I., "Evaluating the measurement uncertainty: Fundamentals and practical guidance", IoP, 2002